

Механізація

УДК 620.952:662767.2

С. М. Кухарець

Д. Т. Н.

Житомирський національний агроекологічний університет

ДИНАМІКА РУХУ СКЛАДОВИХ СУБСТРАТУ В ОБЕРТОВИХ РЕАКТОРАХ

У результаті проведених наукових досліджень запропоновано ряд технічних рішень, які дозволяють усунути розширення біомаси за рахунок забезпечення перемішування шарів біомаси із використанням занурених обертових біореакторів. Теоретично встановлено параметри руху мінеральних та органічних частинок біомаси в об'ємі біореактора у процесі його обертання. На основі класичних рівнянь руху створено математичну модель, що описує рух складових субстрату всередині реактора. Також створено комп'ютерну модель, яка дозволяє графічно відобразити траєкторії руху частинок біомаси всередині реактора, знайти швидкості переміщення та встановити інтенсивність перемішування компонентів біомаси. На основі розробленої математичної моделі встановлено раціональні значення кутової швидкості обертового реактора та його конструктивні параметри із врахуванням необхідної інтенсивності перемішування частинок біомаси в об'ємі реактора. Пропоновані рівняння можуть бути використані для розрахунку широкого спектра ротаційних змішувачів, що оснащені лопатками.

Ключові слова: біореактор, модель, біомаса, субстрат, перемішування, обертання, параметри, швидкість, переміщення.

Постановка проблеми

Експлуатація біореакторів показала, що сприяння контакту бактерій із біомасою субстрату забезпечується за рахунок перемішування субстрату, однак при цьому, інтенсивного перемішування слід уникати, оскільки це може призвести до порушення симбіозу бактерій [1]. У той же час, досвід експлуатації біореакторів показав, що практично неможливо усунути розширення біомаси в реакторі на мінеральний осад та органічну плаваючу біомасу, що вказує на недоліки у роботі систем перемішування біомаси [2, 3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Результати проведених наукових досліджень дозволяють значно усунути розширення біомаси із використанням занурених обертових біореакторів. [4, 5]. Встановлено, що потужність, яка витрачається на перемішування біомаси, залежить від характеристик біомаси (густини, вмісту сухої речовини, розміру частинок сухої речовини) та конструкційно-кінематичних характеристик реактора (кутової швидкості, внутрішнього радіуса, довжини, геометричних

Враховуючи, що мінеральні частинки мають більшу густину, а органічні – меншу ніж середня густина субстрату в реакторі, для визначення відносної швидкості й встановлення траєкторії руху частинок біомаси, виходячи із рис. 1, складено диференціальне рівняння руху мінеральної та органічної частинки субстрату у вигляді матеріальної точки по лопатці обертового реактора. Із врахуванням діючих на мінеральну та органічну частинку сил рівняння їх руху по лопатці буде мати вигляд

$$m \frac{dv_R}{dt} = F_{na} \pm F_{\epsilon} \pm F_m \pm F_{no} \pm F_{ng}, \quad (1)$$

де F_{ϵ} – відцентрова сила інерції частинки, Н;

F_m – сила тертя частинки, Н;

F_{na} – складова сили Архімеда, що діє вздовж лопатки на частинку, Н;

F_{no} – сила опору субстрату, яка протидіє руху частинки в радіальному напрямі, Н;

F_{ng} – складова сили тяжіння частинки, що діє вздовж лопатки, Н;

v_R – відносна швидкість частинки під час руху по лопатці, м/с.

Сила тертя визначається силами, що притискують частинки до лопатки:

$$F_m = f (F_{\tau o} + F_{\tau g} - F_{\tau a} - F_{\kappa}), \quad (2)$$

де $F_{\tau o}$ – сила, що притискує частинку до лопатки завдяки опору субстрату, Н;

$F_{\tau g}$ – складова сили тяжіння частинки, що діє перпендикулярно до лопатки, Н;

$F_{\tau a}$ – складова сила Архімеда для частинки, що діє перпендикулярно до лопатки, Н;

F_{κ} – Коріолісова сила інерції частинки, Н;

f – коефіцієнт тертя частини субстрату по матеріалу лопатки реактора, відн. од.

Враховуючи, що:

$$F_{\epsilon} = m_q r \omega^2; F_g = m_q g; F_a = \rho_c g V_q; F_{\kappa} = 2m_q \omega \frac{dr}{dt}; \quad (3)$$

$$F_{no} = m_q k_1 \frac{dr}{dt}; F_{\tau o} = m_q k_1 r \omega,$$

де m_q – маса частинки, кг;

ω – кутова швидкість обертання реактора, с⁻¹;

r – поточний радіус положення частинки субстрату, м;

g – прискорення земного тяжіння, м/с²;

V_q – об'єм частинки, м³;

k_1 – коефіцієнт пропорційності при ламінарному обтіканні частинок субстратом, с⁻¹; $k_1 = 18\eta / (\rho_c d_E^2)$;

k_2 – коефіцієнт співвідношення густини субстрату і частинки, $k_2 = \rho_c / \rho_u$; ρ_c – густина субстрату, кг/м³;

ρ_u – густина частинки, кг/м³;

η – динамічна в'язкість субстрату, Па с;

d_E – еквівалентний діаметр частинки, м.

Із врахуванням формул 3 та 2 рівняння руху частинок субстрату по поверхні лопатки обертового реактора можна записати так:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + (2f\omega - k_1) \frac{dr}{dt} - (\omega^2 + fk_1\omega)r = g \left[f(\pm 1 \mp k_2) \cos(\omega t) + (\pm k_2 \mp 1) \sin(\omega t) \right]. \quad (4)$$

Це рівняння є лінійним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами та правою частиною у вигляді тригонометричного поліному [12]. Відповідне до нього однорідне диференціальне рівняння буде мати вигляд

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + (2f\omega - k_1) \frac{dr}{dt} - (\omega^2 + fk_1\omega)r = 0. \quad (5)$$

Характеристичне рівняння цього однорідного диференціального рівняння буде мати вигляд

$$\lambda^2 + (2f\omega - k_1)\lambda + (-\omega^2 - fk_1\omega) = 0. \quad (6)$$

Корені характеристичне рівняння матимуть вигляд

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{2} - f\omega - \sqrt{\omega^2(f^2 + 1) + \frac{k_1^2}{4}}; \quad \lambda_2 = \frac{k_1}{2} - f\omega + \sqrt{\omega^2(f^2 + 1) + \frac{k_1^2}{4}}. \quad (7)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння буде мати вигляд

$$r = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + r_{цр}, \quad (8)$$

де C_1, C_2 – постійні величини диференціального рівняння.

Частковий розв'язок неоднорідного диференціального рівняння запишемо у вигляді тригонометричного полінома

$$r_{цр} = M \cos(\omega t) + N \sin(\omega t), \quad (9)$$

перша похідна якого має вигляд:

$$r'_{цр} = -M\omega \sin(\omega t) + N\omega \cos(\omega t), \quad (10)$$

а друга похідна відповідно такий вигляд

$$r''_{цр} = -M\omega^2 \cos(\omega t) - N\omega^2 \sin(\omega t). \quad (11)$$

Рівняння (4) представимо у вигляді

$$\begin{aligned} & \left[-M\omega^2 \cos(\omega t) - N\omega^2 \sin(\omega t) \right] + (2f\omega - k_1) \times \\ & \times \left[-M\omega \sin(\omega t) + N\omega \cos(\omega t) \right] - (\omega^2 + fk_1\omega) \times \end{aligned} \quad (12)$$

$$\times \left[M \cos(\omega t) + N \sin(\omega t) \right] = gf(\pm 1 \mp k_2) \cos(\omega t) + g(\pm k_2 \mp 1) \sin(\omega t).$$

Для знаходження коефіцієнтів M і N на основі даного рівняння використаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (-2\omega^2 - fk_1\omega)M + (2f\omega^2 - k_1\omega)N = gf(\pm 1 \mp k_2) \\ (-2f\omega^2 + k_1\omega)M + (-2\omega^2 - fk_1\omega)N = g(\pm k_2 \mp 1). \end{cases} \quad (13)$$

Розв'язавши дану систему за методом Крамера [7]

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2\omega^2 - fk_1\omega & 2f\omega^2 - k_1\omega \\ -2f\omega^2 + k_1\omega & -2\omega^2 - fk_1\omega \end{vmatrix} = \omega^2 \left[4(\omega^2 f^2 + 1) + k_1^2(f^2 + 1) \right]; \quad (14)$$

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} gf(\pm 1 \mp k_2) & 2f\omega^2 - k_1\omega \\ g(\pm k_2 \mp 1) & -2\omega^2 - fk_1\omega \end{vmatrix} = \omega g k_1 (f^2 + 1) (\pm k_2 \mp 1); \quad (15)$$

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} -2\omega^2 - fk_1\omega & gf(\pm 1 \mp k_2) \\ -2f\omega^2 + k_1\omega & g(\pm k_2 \mp 1) \end{vmatrix} = 2\omega^2 g (f^2 + 1) (\pm k_2 \mp 1), \quad (16)$$

отримаємо

$$M = \frac{\Delta_M}{\Delta} = \frac{gk_1(f^2 + 1)(\pm k_2 \mp 1)}{\omega \left[4(\omega^2 f^2 + 1) + k_1^2(f^2 + 1) \right]}; \quad (17)$$

$$N = \frac{\Delta_N}{\Delta} = \frac{2g(f^2 + 1)(\pm k_2 \mp 1)}{4(\omega^2 f^2 + 1) + k_1^2(f^2 + 1)}. \quad (18)$$

Тоді частковий розв'язок неоднорідного диференційного рівняння руху частинки матиме вигляд

$$r_{CP} = \frac{g(f^2 + 1)(k_2 - 1)}{4(\omega^2 f^2 + 1) + k_1^2(f^2 + 1)} \left(\pm \frac{k_1}{\omega} \cos(\omega t) + 2 \sin(\omega t) \right). \quad (19)$$

Повний розв'язок неоднорідного диференційного рівняння руху частинки як сума загального (8) та часткового розв'язків (19) матиме вигляд

$$r = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + \frac{g(f^2 + 1)(k_2 - 1)}{4(\omega^2 f^2 + 1) + k_1^2(f^2 + 1)} \left(\pm \frac{k_1}{\omega} \cos(\omega t) + 2 \sin(\omega t) \right). \quad (20)$$

Відносна швидкість мінеральної частинки під час руху по лопатці складе

$$v_R = \frac{dr}{dt} = \lambda_1 C_1 \exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 C_2 \exp(\lambda_2 t) + \frac{g(f^2 + 1)(k_2 - 1)}{4(\omega^2 f^2 + 1) + k_1^2(f^2 + 1)} (2\omega \cos(\omega t) \mp k_1 \sin(\omega t)). \quad (21)$$

Прийнявши, що $\frac{g(f^2 + 1)(k_2 - 1)}{4(\omega^2 f^2 + 1) + k_1^2(f^2 + 1)} = k_3$ та враховуючи початкові

умови: $t=0$, $r=R$ (де R – внутрішній радіус реактора), $v=v_{Rn}=0$, для знаходження постійних диференціювання C_1 та C_2 запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = R \mp \frac{k_1 k_3}{\omega} \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = -2\omega k_3. \end{cases} \quad (22)$$

Розв'яжемо дану систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1; \quad (23)$$

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} R \mp \frac{k_1 k_3}{\omega} & 1 \\ -2\omega k_3 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \left(R \mp \frac{k_1 k_3}{\omega} \right) + 2\omega k_3; \quad (24)$$

$$\Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} 1 & R \mp \frac{k_1 k_3}{\omega} \\ \lambda_1 & -2\omega k_3 \end{vmatrix} = -2\omega k_3 - \lambda_1 \left(R \mp \frac{k_1 k_3}{\omega} \right); \quad (25)$$

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\left(\pm R - \frac{k_1 k_3}{\omega} \right) \pm \frac{2\omega k_3}{\lambda_2} \right]; \quad (26)$$

$$C_2 = \frac{\Delta_{C_2}}{\Delta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\pm \frac{k_1 k_3}{\omega} - \frac{2\omega k_3}{\lambda_1} - R \right). \quad (27)$$

Знаючи постійні інтегрування, можна знайти відстань, що проходять частинки біомаси лопаткою, та встановити зміну швидкості їх переміщення за встановлений проміжок часу.

Розрахункова схема дії сил на мінеральну та органічну частинки субстрату, що перебувають у вільному русі в об'ємі обертового реактора, представлена на рис. 2. Для встановлення траєкторії руху частинок біомаси складено диференціальні рівняння руху частинок субстрату після сходження із лопаток в об'ємі реактора.

Очевидно, що на мінеральні та органічні частинки субстрату, які рухаються всередині реактора після сходження із лопаток, діють такі сили:

$$F_g = m_c g; F_a = m_c k_2 g; F_o = m_c k_1 v. \quad (28)$$

Відповідно до рівнянь (28) та з урахуванням того, що мінеральна частинка буде тонути, а органічна спливати, побудовано рівняння руху центру маси таких частинок:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \mp k_1 v \cos \alpha \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = g(k_2 - 1) \pm k_1 v \sin \alpha, \end{cases} \quad (29)$$

де x – переміщення частинки вздовж осі абсцис, м;

y – переміщення частинки вздовж осі ординат, м;

t – час руху частинки після сходження із лопатки реактора, с.

Для визначення траєкторій руху мінеральної та органічної частинок після сходження з лопаток реактора використаний метод послідовного диференціювання [12], який дає наближені розв'язки систем рівнянь (29) у вигляді степеневого ряду Тейлора.

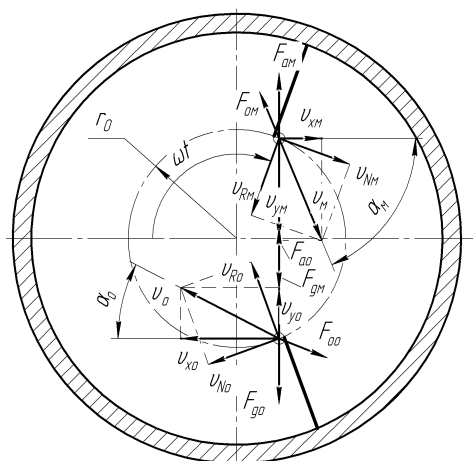


Рис. 2. Схема дії сил на мінеральну (*м*) та органічну (*о*) частинки субстрату, що перебувають у вільному русі в об'ємі обертового реактора:

F_g – сила тяжіння, Н; F_a – сила Архімеда, Н; F_o – сила опору субстрату, Н;
 r_o – радіус на якому закінчуються лопатки, м; v – абсолютна швидкість частинки, м/с;
 v_R – відносна швидкість частинки під час сходження із лопатки, м/с; v_N – нормальна швидкість частинки під час сходження із лопатки, м/с;
 v_x – проекція абсолютної швидкості частинки на вісь x , м/с; v_y – проекція абсолютної швидкості частинки на вісь y , м/с; α – кут між абсолютною швидкістю та її проекцією на вісь x , рад; ωt – кут повороту реактора при сходженні частинки із лопатки, рад

Враховуючи початкові умови, що відповідають абсолютній швидкості в момент сходження частинки біомаси із лопатки $v=v_o$, кутові між абсолютною швидкістю та її проекцією на вісь y у цей момент $\alpha=\alpha_o$, та прийнявши $x_o=0$, $y_o=0$, запишемо:

$$\begin{cases} x = \frac{v_o \cos \alpha_o}{k_1} [\pm 1 \mp \exp(-k_1 t)] \\ y = \frac{v_o \sin \alpha_o}{k_1} [\pm \exp(-k_1 t) \mp 1] \pm \frac{g(1-k_2)}{k_1^2} [1 - k_1 t - \exp(-k_1 t)]; \end{cases} \quad (30)$$

Згідно з отриманими системами рівнянь створено комп'ютерну програму, що дозволяє графічно відобразити траєкторії руху частинок біомаси всередині реактора (рис. 3), знайти швидкості їх переміщення та встановити інтенсивність перемішування компонентів біомаси.

Так, наприклад, встановлено, що за середньої густини субстрату $\rho_c = 1025\text{--}1050 \text{ кг/м}^3$, густини мінеральної частини субстрату $\rho_m = 1150\text{--}1250 \text{ кг/м}^3$ та

густини органічної частини субстрату $\rho_o = 800\text{--}900 \text{ кг/м}^3$, для забезпечення необхідної інтенсивності перемішування раціональні значення кутової швидкості реактора становлять $\omega = 0,035\text{--}0,08 \text{ с}^{-1}$.

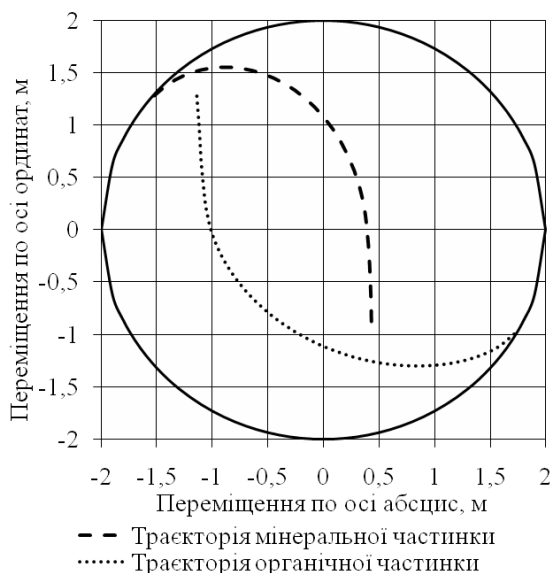


Рис. 3. Приклад траєкторії руху частинок біомаси:
кутова швидкість обертання реактора $\omega=0,08 \text{ рад/с}$,
внутрішній радіус реактора $R=2 \text{ м}$

За значень кутової швидкості та внутрішнього радіусу реактора, прийнятих при розрахунку, а також довжині лопатки реактора $l=(0,775\text{--}0,825)R$, мінеральні частинки підіймаються у верхню частину реактора, після чого вони відокремлюються від лопатки та рухаються вниз, а органічні частинки субстрату занурюватимуться у нижню частину біореактора, потім відокремлюються від лопатки та рухаються вгору, внаслідок цього буде забезпечуватися рівномірне перемішування та взаємопроникнення складових субстрату.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Розроблена математична модель дозволяє встановити раціональні значення кутової швидкості обертового реактора та його конструктивні параметри на основі визначення параметрів руху частинок біомаси лопатками та в об'ємі реактора. Встановлено також, що рівномірне перемішування та взаємопроникнення органічних й мінеральних складових субстрату забезпечується за раціональних значень кутової швидкості реактора від $0,035$ до $0,08 \text{ с}^{-1}$ та довжині лопаток реактора від $77,5$ до $82,5 \%$ його внутрішнього радіуса.

Пропоновані рівняння можуть бути використані для розрахунку широкого спектра ротаційних змішувачів, що оснащені лопатками.

Література

1. Руководство по биогазу. От получения до использования / Специальное агентство возобновляемых ресурсов (FNR). – 5-е изд. – Гюльцов : Германия, 2012. – 213 с.
 2. Голуб Г. Досвід використання біогазових установок у Польщі / Г. Голуб, С. Осауленко // Техніка і технології АПК. – 2014. – № 11. – С. 12–15.
 3. Сидоров Ю. І. Сучасні біогазові технології / Ю. І. Сидоров // Біотехнологія. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 46–60.
 4. Кухарець С. М. Обґрунтування енергетичних витрат на привід обертового реактора біогазової установки / С. М. Кухарець, Г. А. Голуб // Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України : зб. наук. пр. / ДНУ УкрНДПВТ ім. Л. Погорілого. – 2014. – Вип. 18 (32), кн. 2. – С. 356–365.
 5. Голуб Г. А. Особливості конструкції модульної біогазової установки з обертовим реактором / Г. Голуб, С. Кухарець, Б. Рубан // Техніка і технології АПК. – 2014. – № 9. – С. 10–14.
 6. Технологія переробки біологічних відходів у біогазових установках з обертовими реакторами / Г. А. Голуб, О. В. Сидорчук, С. М. Кухарець [та ін.] ; за ред. Г. А. Голуба. – К. : НУБіП України, 2014. – 106 с.
 7. Кухарець С. М. Сировинна база та ефективність виробництва біогазу / С. М. Кухарець, Г. А. Голуб // Наук. вісн. Нац. ун-ту біоресурсів і природокористування України. Серія. Техніка та енергетика АПК. – 2015. – Вип. 212, ч. 1. – С. 11–21.
 8. Пат. 110077 Україна, МПК С02F 11/04, С02F 3/28. Метантенк / Г. А. Голуб, С. М. Кухарець ; заявник і патентовласник Нац. ун.-т. біоресурсів і природокористування України. – № а201409259; заявл. 19.08.2014; дата публікації 10.11.2015, Бюл. № 21.
 9. Кухарець С. М. Обґрунтування енергетичних витрат на привід обертового реактора біогазової установки / С. М. Кухарець, Г. А. Голуб // Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України : зб. наук. пр. / ДНУ УкрНДПВТ ім. Л. Погорілого. – 2014. – Вип. 18 (32), кн. 2. – С. 356–365.
 10. Особливості виробництва біопалива та отримання енергії в умовах агропромислового виробництва / Г. А. Голуб, С. М. Кухарець, В. О. Шубенко, Н. М. Бовсунівська // Техніка і технології АПК. – 2015. – № 2 (65). – С. 31–34.
 11. Технічні та технологічні пропозиції отримання енергії із сировини сільськогосподарського походження / С. М. Кухарець, Г. А. Голуб, О. В. Скидан, О. Ю. Осипчук // Вісник ЖНАЕУ. – 2015. – № 2 (50), т. 1. – С. 369–384.
 12. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд., испр. – М. : Наука, 1986. – 544 с.
-