

УДК 378:512:004

ПРОПЕДЕВТИКА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

О.Е. Корнійчук

кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Житомирський національний агроекологічний університет, м. Житомир, Україна, e-mail: elena.k.02@i.ua

Анотація. У статті обґрунтовано необхідність і можливість засвоєння студентами нематематичних спеціальностей основ математичного моделювання, починаючи з перших етапів університетської освіти, в процесі навчання вищої математики. Демонструється взаємозв'язок лінійної алгебри, задач лінійного програмування та систем комп'ютерної математики.

Ключові слова: лінійна алгебра, лінійне програмування, задача оптимізації, модель, математичне моделювання, прийняття рішення, системи комп'ютерної математики, MathCad, табличний процесор Excel.

PROPEDEUTICS OF MATHEMATICAL MODELING IN THE COURSE OF HIGHER MATHEMATICS

Olena Korniiichuk

Ph.D., Associate Professor of Higher and Applied Mathematics, Zhytomyr National Agroecological University, Zhytomyr, Ukraine, e-mail: elena.k.02@i.ua

Abstract. In the article the necessity and possibility of mastering by students non-mathematical specialties basic knowledge on mathematical modeling, beginning with the first stages of University Education in learning higher mathematics. Is demonstrated interconnection - linear algebra, linear programming, systems of computer mathematics.

Keywords: linear algebra, linear programming, optimization task, model, mathematic modelling, decision-making, systems of computer mathematics, MathCad, Excel spreadsheet.

Вступ. Інформатизація освіти, яка торкається практично кожного аспекту організації навчання – від галузевих стандартів і навчальних планів до формування необхідного рівня професійної культури всіх учасників освітнього процесу, по суті, створює новий спосіб пізнання. Зміст навчання вищої математики має враховувати той матеріал, що є, з одного боку, принципо-



вим й характерним для використання математичних методів майбутніми інженерами, технологами або менеджерами за умов широкого використання комп'ютерних технологій, а з іншого – доступним для розуміння студентами та цікавим для самостійного опрацювання.

Забезпечення узгодженої роботи та взаємодії колективів людей, комплексів оснащення й обладнання вимагає ретельного вивчення сукупності методів і підходів щодо пошуку та підготовки ефективних рішень. Науковий напрям, що надає кількісні основи для прийняття рішень, отримав назву «дослідження операцій». Етапи дослідження: *побудова математичної моделі явища (операції) → аналіз моделі → реалізація результатів дослідження*.

Для побудови моделей та їх розв'язання необхідні певні статистичні й математичні методи, а також системи комп'ютерної математики (СКМ).

Критерієм існування такого наукового напрямку є комплексний підхід до поставлених задач, співпраця і порозуміння спеціалістів різних галузей (математиків, економістів, інженерів, операторів, екологів, агрономів, експертів, бухгалтерів, менеджерів). Тому володіти методами математичного моделювання потрібно всім, хто задіяний в організації виробництва [1].

Водночас існує проблема сприйняття та усвідомлення студентами дисциплін, сутність і тематика яких споріднена: «Математичне моделювання систем та процесів», «Математичні методи і моделі», «Дослідження операцій», «Математичне програмування», «Методи оптимізації», «Моделювання і прогнозування стану довкілля», «Оптимізація виробничих процесів» тощо. Неприйняття, не усвідомлення та, як наслідок, незнання сутності зазначених дисциплін відбувається на завершальному етапі навчання в університеті (9-10 семестр).

Актуальними завданнями математичної освіти і вищої школи виступають мотивація вивчення та активізація математичних знань студентів для майбутньої професійної діяльності, не лякаючи тих, хто не уявляв і не розглядав математику в якості необхідного робочого інструменту щодо обраної спеціалізації [2; 3]. Зокрема, подання прийомів і методів математичного моделювання має відбуватись у популярній і доступній формі з перших курсів навчання, буквально з перших лекцій курсу вищої математики та лабораторних занять з інформатики та комп'ютерної техніки [4; 5].

Математичний аспект має бути обов'язковим у широкому контексті процесу прийняття рішень. Проте для побудови математичної моделі необхідні такі статистичні відомості та економічні показники, які б реально характеризували результати дослідницької чи господарської діяльності. Комп'ютерні технології допомагають розглядати різноманітні математичні

моделі, виявляти сутність варіативних результатів аналізу практичних ситуацій, що дає студентам не тільки основу для розуміння математичних методів, а й розуміння можливостей їх застосування. Проте, доки не побудована математична модель практичної задачі, проблеми, процесу, не можна й говорити про використання комп'ютерних технологій!

Розв'язання практичних задач за допомогою комп'ютера вимагає:

- уміння будувати й досліджувати математичні моделі;
- знання загальних правил подання математичного об'єкту у вигляді, що задовольняє вимогам комп'ютерного дослідження математичної моделі;
- знання структури оптимізаційних математичних моделей; уміння застосовувати методи оптимізації.

Такий підхід було визначено у 80-х рр. минулого століття як перспективний напрям розвитку загальноосвітньої математичної підготовки. З метою економічного виховання старшокласників пропонувалося методичне удосконалення традиційних розділів математики і посилення прикладного спрямування навчання, зокрема розв'язування задач лінійного програмування графічним та симплексним методами.

Метою даної роботи є розкриття необхідності та можливості пропедетики математичного моделювання при вивченні методів вищої математики, зокрема, ознайомлення студентів з елементами і задачами лінійного програмування, їх розв'язання засобами комп'ютерної математики, що суттєво підвищує рівень вмотивованості навчання та математичної культури, розширює кругозір, орієнтує на успішну професійну діяльність.

Виклад матеріалу. Алгебра матриць широко використовується для моделювання наукових досліджень. Це питання постало особливо актуальним у програмуванні, при розробці й використанні баз даних: при роботі з ними майже всі дані зберігаються та обробляються у матричній формі [6; 7].

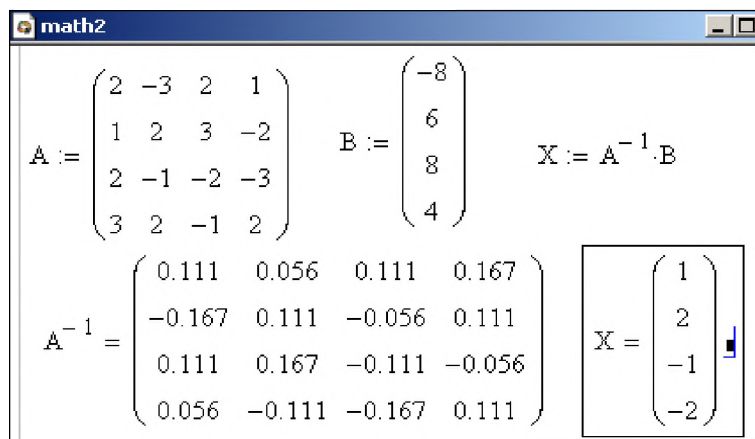
Розділ курсу вищої математики «Лінійна алгебра» передбачає опрацювання студентами визначників і матриць, їх застосування для розв'язування систем лінійних рівнянь (СЛР). А наслідком засвоєних умінь і навичок має бути дослідження лінійних моделей і розв'язання прикладних задач, що вимагає виконання великих обсягів обчислень. Використовуючи, наприклад, метод оберненої матриці для знаходження розв'язку системи 4-х рівнянь з 4-ма невідомими кращі студенти витрачають біля 30 хвилин і при цьому можуть допустити помилки. А розв'язок СЛР комп'ютерними засобами можливо знайти за 3-4 хвилини.

Завдання. Розв'язати методом оберненої матриці систему лінійних рівнянь (1), яка є математичною моделлю деякого досліджуваного процесу, та зробити перевірку знайденого результату за допомогою засобів комп'ютерної математики.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язання системи (1) засобом *MathCad* подано на рисунку 1.

MathCad – універсальне математичне середовище, яке визнане одним з найкращих для наукових, технічних, інженерних та економічних обчислень. Якщо для введення формул в інших пакетах комп'ютерної математики, а також в електронних таблицях, використовується доволі складний синтаксис, то *MathCad* відрізняється легкістю у засвоєнні його функцій і процедур, можливістю у звичній формі, *ніби з олівцем в руках*, компоувати робочий аркуш. Розв'язуючи задачу в *MathCad*, можна вільно передавати дані у середовище іншого додатка, зокрема інтегруватися з *Word* та *Excel*.



The screenshot shows the following mathematical expressions in MathCad:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad X := A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.111 & 0.056 & 0.111 & 0.167 \\ -0.167 & 0.111 & -0.056 & 0.111 \\ 0.111 & 0.167 & -0.111 & -0.056 \\ 0.056 & -0.111 & -0.167 & 0.111 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 – Розв'язання СЛР у *MathCad*

У галузі освіти система *MathCad* є фактично обов'язковим атрибутом в наборі стандартних пакетів типу текстового редактора *Word*, табличного процесора *Excel*, системи управління базами даних *Access*, що забезпечують комп'ютерну підтримку навчального процесу.

MS Excel – редактор електронних таблиць, що містить велику кількість вбудованих функцій (алгебраїчних, фінансових, статистичних), дає змогу проводити розрахунки з великими масивами даних, операції з матрицями, табулювання функцій, створювати динамічні діаграми, моделювати й досліджувати різноманітні складні фінансово-економічні ситуації.

На рисунку 2 демонструється розв'язання даної системи лінійних рівнянь в *Excel*.

F12		={МУМНОЖ(A11:D14;F4:F7)}				
	A	B	C	D	E	F
1						
2	Матриця коефіцієнтів СЛР А					Стовпчик вільних членів В
3						
4	2	-3	2	1		-8
5	1	2	3	-2		6
6	2	-1	-2	-3		8
7	3	2	-1	2		4
8						
9	Обернена матриця 1/A					Розв'язок $X = (1/A) \cdot B$
10						
11	0,111111	0,055556	0,111111	0,166667		1
12	-0,16667	0,111111	-0,05556	0,111111		2
13	0,111111	0,166667	-0,11111	-0,05556		-1
14	0,055556	-0,11111	-0,16667	0,111111		-2
15						

Рисунок 2 – Розв'язання СЛР в Excel

Спорідненим до розділу вищої математики «Лінійна алгебра» є лінійне програмування – метод математичного моделювання, розроблений для оптимізації використання обмежених ресурсів. *Оптимізація* – процес знаходження екстремального значення функції.

На мікрорівні, в процесі управління окремим виробництвом, приймається безліч рішень. Всі вони вимагають аналітичного обґрунтування: ті самі витрати можуть давати різний економічний ефект в залежності від прийнятих рішень. Потрібно підготувати й розглянути різні варіанти рішення та визначити оптимальний. Для цього у 1939 році Л. Канторовичем був розроблений метод лінійного програмування.

Якщо математична модель описує реальні технологічні та економічні процеси, то вона, як правило, може мати сотні й тисячі змінних та обмежень. Тому розв'язання таких задач стало можливим лише за допомогою використання комп'ютерних технологій. Для комп'ютерної реалізації лінійних моделей розроблено універсальний *симплексний* метод. В основі перетворень симплекс-таблиць для знаходження оптимального розв'язку лежить один з методів розв'язання СЛР – метод *Жордана-Гаусса*.

Excel дає змогу моделювати й досліджувати різноманітні виробничі, фінансово-економічні ситуації і здатна задовольнити потреби менеджерів та інженерів, фахівців з маркетингу та банківської справи.

Надбудова Excel містить інструмент «Пошук розв'язку», який дозволяє створювати розрахункові таблиці для пошуку оптимальних розв'язків багатомірних екстремальних задач з обмеженнями. На заняттях з вищої математики з питання «Системи рівнянь і методи оптимізації», студентів можна

ознайомити із загальними задачами лінійного програмування (задача «дієти», про розподіл ресурсів, раціональний розкрий матеріалів, транспортна задача), їх математичними моделями.

Процес формування навичок використання команди «Пошук розв'язку» проілюструємо на прикладі наступної задачі:

«Фірма рекламує свою продукцію, використовуючи телебачення, радіо та газети. Витрати на рекламу в бюджеті фірми обмежені сумою 8000 ум. од. на місяць. Досвід минулих років показав, що 1 ум. од., що витрачена на телерекламу, дає фірмі прибуток у розмірі 10 ум.од., а витрачена на рекламу на радіо та в газетах – відповідно 4 та 8 ум.од. Фірма має намір витратити на теле- та радіо-рекламу не більш як 70 % рекламного бюджету, а витрати на газетну рекламу не повинні більш як удвічі перевищувати витрати на радіо-рекламу. Визначити такий варіант розподілу рекламного бюджету за різними напрямками реклами, який дає фірмі найбільший прибуток від рекламування своєї продукції».

Дана задача відноситься класу *задач лінійного програмування* (ЗЛП): необхідно встановити *план* (програму) випуску продукції (розподілу бюджету), орієнтуючись на *цільову функцію* (найбільший прибуток) і приймаючи до уваги *обмеження* (ресурси, витрати).

Зауваження. «Лінійного» – означає, що цільова функція та обмеження між змінними задачі залежать лінійно у вигляді рівнянь або нерівностей. «Програмування» не має прямого відношення до програмування в сучасному розумінні цього слова. Тут інший зміст: програма – план випуску продукції.

Найбільш простим і наочним методом розв'язання ЗЛП з двома змінними є *графічний метод*. Проте математична модель даної задачі має три змінні: витрати на телебачення, радіо, газети. При цьому цільова функція (2) – найбільший прибуток від реклами:

$$z = 10x + 4x + 8x \rightarrow \max \quad (2)$$

і обмеження витрат на рекламу (3):

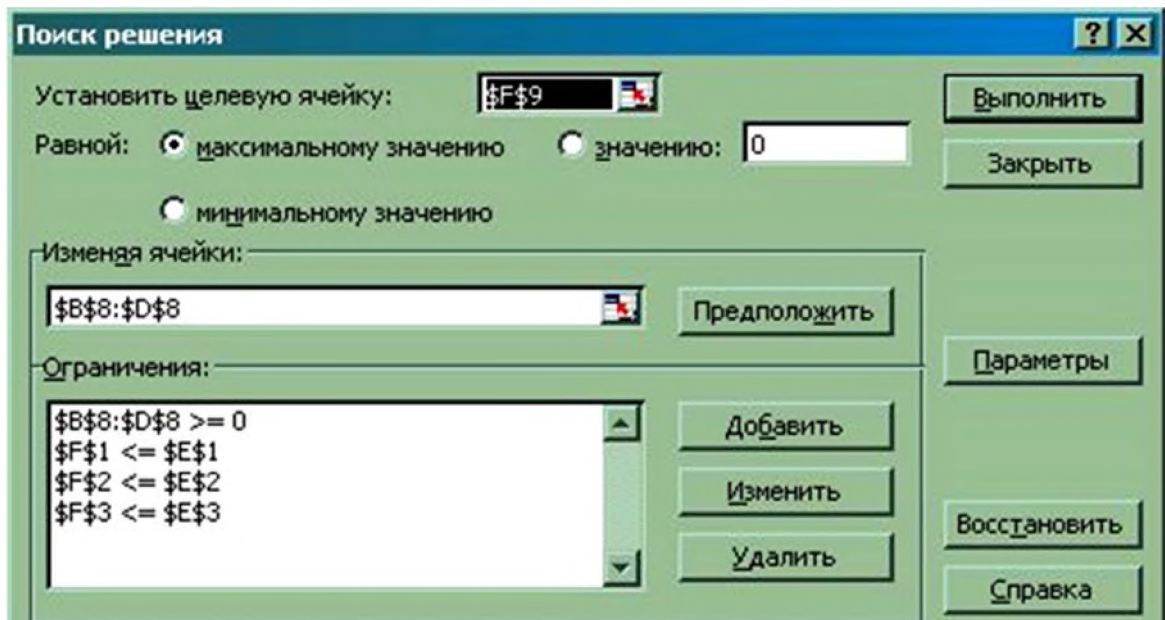
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 8000 \\ x_1 + x_2 \leq 5600 \\ x_3 \leq 2x_2 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1..3 \end{cases} \quad (3)$$

Умову задачі подано на робочому аркуші у вигляді таблиці (рис. 3), а числові значення у її виділених клітинках – це отримані результати розрахунків програми.

	A	B	C	D	E	F	
1	Щомісячний рекламний бюджет, ум.од.-				8000	8000	
2	Теле-та радіореклама не більше 70% бюджету -				5600	5600	
3	Газетна рекл. не перевищує більш як удвічі витрати на радіо					0	
4		Телебачення	Радіо	Газети			
5	Прибуток з 1 ум.од.,						
6	витраченої на рекл.				10	4	8
7	Розподіл рекл.						
8	бюджету, ум.од.				4400	1200	2400
9					Загальний прибуток:		68000
10							

Рисунок 3 – Робочий аркуш Excel

Заповнення розрахункової таблиці формулами та занесення даних у «цільову комірку», «змінну комірку», «обмеження» вимагає від користувача поглибленого розуміння суті задачі, побудови її математичної моделі, знань можливостей програми Excel (рис. 4).



Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: максимальному значению значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Рисунок 4 – Розрахункова таблиця «Пошук розв'язку»

Після занесення даних і формул до розрахункової таблиці, заповнення комірок «Пошуку розв'язку» заповнюються порожні комірки F1:F3, B8:D8, F9 робочого аркушу (рис. 3). Отже, фірма буде мати найбільший прибуток від



рекламування своєї продукції в розмірі 68 тис. ум. од. за різними напрямками реклами у разі витрат на телебачення 4400 ум. од., радіо – 1200 ум. од., газети – 2400 ум. од. щомісячно.

Дану задачу і, загалом, задачі лінійного програмування зручно розв'язувати за допомогою функції $Maximize(f,X)$ або $Minimize(f,X)$ у *MathCad* [8].

Якщо мова йде про обчислення, то застосування *Excel* є ефективним засобом для задач будь-якої складності. Проте в тому випадку, коли потрібно отримати аналітичний результат, виникають труднощі.

Для виконання символічних обчислень розроблено низку потужних програмних продуктів: *MathCad*, *Maple*, *MatLAB*, *Mathematica*, *MuPAD*, *Derive*. Це багатофункціональні комп'ютерні середовища з власним набором команд, внутрішньою мовою, засобами анімації. Вони надають інструментарій, необхідний для проведення наукових, технічних, інженерних та економічних досліджень, для роботи з формулами, числовими даними, матрицями, похідними, інтегралами, границями, рядами, графіками та поверхнями [9].

До складу *Maple* входять пакети підпрограм для розв'язання задач лінійної оптимізації (симплекс-метод) та задач фінансової математики.

Зауважимо, що розробники пакетів *MatLAB* і *MathCad* (з *V5* по *V13*) використовують символічний процесор *Maple* у своїх програмах (аналітичні перетворення *MathCad14* – з пакету *MuPAD*). На відміну від *MathCad*, введення математичних конструкцій в *Maple* здійснюється за аналогією з системами програмування типу *Pascal* та *Basic*, спілкування з якими є необхідним для студентів. Враховуючи складність інтерфейсу та специфічну мову опису математичних виразів у середовищах *MatLAB* і *Mathematica*, вони залишаються поза нашої уваги, незважаючи на свої великі можливості.

Звернемо увагу на пакет програм вітчизняного виробництва – *GRAN*, над створенням якого у різні роки працювали М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, О.В. Вітюк, Є.Ф. Вінниченко, А.В. Пеньков. Засоби *GRAN1*, *GRAN2D*, *GRAN3D* призначені для візуалізації даних, що мають складну математичну природу, й використовуються при вивченні алгебри, математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, для створення динамічних геометричних образів [10; 11].

Студентам необхідно навчитися працювати з різними типами комп'ютерних програм загального та конкретно-предметного призначення. Зокрема, набуття студентами навичок роботи з системами комп'ютерної математики – *MathCad* [1; 8], *Maple* [9], *GRAN* [10; 11; 12], допоможе їм при розв'язанні багатьох задач вищої та прикладної математики, для перевірки

знайдених результатів (геометричний аналіз завдань та розв'язків, аналітичні перетворення, розрахунки).

Висновок. Використання СКМ у навчальному процесі надає реальну можливість майбутнім фахівцям привчатися працювати за наступним ланцюжком: *формалізація вихідної проблеми → побудова математичної моделі → вибір математичного методу і алгоритму розв'язування моделі → реалізація розв'язання на комп'ютері → перевірка адекватності моделі → прийняття рішення та реалізація розв'язку.*

Нерозуміння, побоювання, ігнорування, а звідси й гальмування впровадження у господарську практику економіко-математичних методів й досі відбувається тому, що, починаючи з перших курсів, студентам майже не розкриваються можливості та перспективи методів вищої математики, її комп'ютерних засобів для математичного моделювання та дослідження операцій у майбутній професійній діяльності.

До відома студентів у доступній формі потрібно донести, що цей науковий напрям, хоча й постійно звертається до математики, проте уникає складних математичних викладок. Необхідно розібратись у сутності типових задач, методах і алгоритмах їх розв'язання, а підмогою в знаходженні результату має бути вільне спілкування з пакетами прикладних програм.

ЛІТЕРАТУРА

1. Корнійчук О.Е. Новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва / О.Е. Корнійчук // Освіта та педагогічна наука. – Луганськ: ДЗ «ЛНУ ім. Т. Шевченка». – 2012. – № 3 (152). – С. 54-61.
2. Корнійчук О. Мотивація в системі навчання математичних дисциплін / О. Корнійчук // Витоки педагогічної майстерності : збірник наук. праць. Серія «Педагогічні науки». – Полтава: ПДПУ ім. В.Г. Короленка. – 2012. – Вип. 10. – С. 144-148.
3. Корнійчук О.Е. Професійно орієнтований тренінг у формуванні математичних компетентностей інженерів еколого-природознавчого напрямку / О.Е. Корнійчук // Гуманітарний вісник ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький ДПУ ім. Г.Сковороди» : збірник наукових праць. Педагогіка, психологія, філософія. – Переяслав-Хмельницький : ДВНЗ «Переяслав-Хмельн. ДПУ ім. Г. Сковороди». - 2013. – Вип. 28. – Т 2. – С. 439-445.
4. Корнійчук О.Е. Напрямки інтеграції математики з інформатикою у процесі підготовки молодших спеціалістів економічного профілю / О.Е. Корнійчук, В.М. Єрмаков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 6. – С. 16-19.
5. Корнійчук О.Е. Комп'ютерні технології у вивченні математики для економістів / О.Е. Корнійчук, В.М. Єрмаков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 8. – С. 16-18.
6. Корнійчук О.Е. Взаємодія між дисциплінами фундаментальної та професійної підготовки в процесі вивчення компонент інтелектуальної системи / О.Е. Корнійчук, Є.Ю. Тімченко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2012. – № 7 (103). – С. 15-19.
7. Корнійчук О.Е. Формування професійного інтелекту в процесі моделювання систем штучного інтелекту / О.Е. Корнійчук // Зб. наук. праць КПНУ ім. Івана Огієнка. Серія



педаг. – Кам'янець-Под. : КПНУ ім. Івана Огієнка. – 2014. – Вип. 20 : «Управління якістю підготовки майбутнього вчителя фізико-технологічного профілю». – С. 90-94.

8. Корнійчук О.Е. Математичні моделі в економічних розрахунках на базі *Mathcad* // Математика в школі. – 2006 - № 6. – С. 35-41.

9. Корнійчук О. Система *Maple* в процесі навчання методам диференціального числення / О. Корнійчук // Інформаційні технології у професійній діяльності : матер. VI Всеукр. науково-практичної конференції. – Рівне: РДГУ. – 2012. – С. 28-30.

10. Корнійчук О. Е. GRAN- ілюстрація та прогнозні обчислення еколого-економічної моделі / О. Е. Корнійчук // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. № 2. Комп'ютерно орієнтовані системи навчання. – 2007. – Вип. 12. – С. 131–136.

11. Корнійчук О. Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв'язування задач економічного змісту / О. Е. Корнійчук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2012. – № 8 (104). – С. 12-16.

12. Корнійчук О. Застосування вищої математики до розв'язання актуальних питань з проблеми екологізації економіки / О. Корнійчук // Проблеми та перспективи наук в умовах глобалізації : матеріали VI Всеукр. наук. конф. – Тернопіль : Тернопільський нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка. – 2010. – Ч. I. : Педагогіка, психологія, суспільствознавство, мовознавство. – С. 24-30.

