**ФІЗИКО – МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ**
**УДК 621.396.962.3**

*Микола Фомін*
*(Житомир)*

# ВЗАЄМНО КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ЛІНІЙНО-ЧАСТОТНО МОДУЛЬОВАНОГО СИГНАЛУ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ ДОППЛЕРА

*Методами математичного аналізу отримана взаємно кореляційна функція імпульсного ЛЧМ радіолокаційного сигналу з урахуванням впливу ефекту Допплера на зміщення і швидкість зміни його частоти та побудовано її тіло невизначеності. Показано, що зазначене дозволяє позбавитись від невизначеності "дальність-швидкість" і підвищити розрізнювальну здатність РЛС за їх дальністю та радіальною швидкістю.*

***Ключові слова***: *взаємно кореляційна функція, ЛЧМ радіолокаційний сигнал, ефект Допплера, зміщення частоти радіосигналу, швидкість зміни частоти, тіло невизначеності, розрізнювальна здатність РЛС.*

*Methods of the mathematical analysis received a cross-correlation function of impulse LChM of a radar echo taking into account influence of a Doppler effect on offset and speed of change of its frequency and her body of uncertainty is constructed. It is shown what specified allows will get rid of uncertainty "range speed" of the purposes and to increase resolution capability of radar station on their range and radial speed.*

***Keywords:*** *Cross-correlation function, LChM radar signal, Doppler's effect, radio signal frequency shift, Speed of change of frequency, uncertainty body, radar resolution.*

У сучасних радіолокаційних станціях (РЛС) широко використовуються сигнали з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ), які при великій тривалості зондувальних сигналів (необхідна енергетика для локації об'єктів (цілей) на великій дальності) забезпечують високе розрізнення за дальністю за рахунок широкосмуговості сигналів. Математично ЛЧМ сигнал описується [1, с. 72]

$$u(t) = U(t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(f_0 \cdot t + \frac{b \cdot t^2}{2}\right) + \varphi_0\right], \tag{1}$$

де: $U(t)$ – амплітуда ЛЧМ сигналу; $f_0$ – початкова частота ЛЧМ сигналу; $\varphi_0$ – початкова фаза ЛЧМ сигналу, приймемо у подальших викладках $\varphi_0 = 0$; $b$ – швидкість зміни частоти (параметр модуляції) ЛЧМ сигналу, $b = \Delta f / \tau_c$; $\Delta f$ – девіація частоти ЛЧМ сигналу; $\tau_c$ – тривалість ЛЧМ сигналу.

Одною із основних загальних характеристик ЛЧМ сигналу є його база, яка визначається як добуток девіації частоти на тривалість сигналу $-\Delta f \cdot \tau_c$. Збільшення величини бази ЛЧМ сигналу, що використовується у радіолокаційної системі, підвищує її потенційні інформаційні можливості – кількість, точність, детальність, достовірність радіолокаційної інформації тощо.

В цих радіолокаційних системах ефект Допплера враховується як просте зміщення усіх частот ЛЧМ зондувального сигналу [2, с.44]. Таке наближення призводить до того, що при використанні ЛЧМ сигналів з великою базою не враховується, зумовлене ефектом Допплера, спотворення моделюючої функції (швидкості зміни частоти, параметра модуляції) зондувального сигналу. У той же час таке спотворення ЛЧМ сигналів з великою базою може бути використане для розрізнення об'єктів локації за радіальною швидкістю.

Розглянемо зондувальний ЛЧМ сигнал $u_з(t)$ з прямокутною обвідною $U(t)$ у комплексній формі [1, с. 72]

$$u_З(t) = U(t/\tau_c) \cdot \exp\left[ j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left( f_0 \cdot t + \frac{b \cdot t^2}{2} \right) \right]. \tag{2}$$

Амплітуду такого імпульсного сигналу можна описати наступним чином

$$U(t/\tau_c) = \begin{cases} 1, & |t/\tau_c| \le 1/2, \\ 0, & |t/\tau_c| > 1/2. \end{cases} \tag{3}$$

Радіолокаційний сигнал, який відбивається від точкового об'єкту (цілі), що рухається з постійною радіальною швидкістю, описується виразом

$$u_в(t) = U\left[ \frac{t \cdot (1 - \Delta v)}{\tau_c} \right] \cdot \exp\left\{ j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[ f_0 \cdot t \cdot (1 - \Delta v) + \frac{b \cdot t^2}{2} \cdot (1 - \Delta v)^2 \right] \right\}, \tag{4}$$

де: $\Delta v = v_r / c$ – показник допплерівського стискання (розширення) масштабу часу за рахунок руху об'єкта локації з радіальною швидкістю $v_r$, $c$ – швидкість розповсюдження електромагнітної енергії, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $t$ – поточний час, відлік якого здійснюється відносно середини прийнятого сигналу.

На виході приймального каналу, що повністю узгоджений за часовою затримкою та частотою Допплера з відбитим сигналом, буде сигнал $g(\Delta\tau, \Delta v)$ [1, с. 149]

$$\begin{aligned} g(\Delta\tau, \Delta v) = \frac{1}{\tau_c} \cdot \int_{-\tau_c/2}^{\tau_c/2} \exp\left\{ j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[ f_0 \cdot (t - \Delta\tau) + \frac{b}{2} \cdot (t - \Delta\tau)^2 \right] \right\} \times \\ \times \exp\left\{ -j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[ f_0 \cdot (1 - \Delta v) \cdot t + \frac{b}{2} \cdot (1 - \Delta v)^2 \cdot t^2 \right] \right\} dt, \end{aligned} \tag{5}$$

де : $\Delta\tau$, $\Delta v$ – неузгодження за часовою затримкою та допплерівським зсувом частоти між прийнятим й опорним сигналами.

Вираз (5) описує функцію взаємної кореляції приймального каналу для ЛЧМ сигналу, відбитого від об'єкту локації (цілі). Неузгодження за часовою затримкою визначає розрізнення за дальністю, а неузгодження за допплерівським зсувом частоти – розрізнення за радіальною швидкістю об'єкта локації.

Розрізнювальні здатності сигналу за дальністю та радіальною швидкістю можна визначити за допомогою модуля функції взаємної кореляції $\left|g(\Delta\tau,\,\Delta\nu)\right|$, яка є математичним описом тіла невизначеності прийнятого ЛЧМ сигналу, що спотворений ефектом Допплера. Для упорядкування цього опису у підінтегральній функції виразу (5) здійснимо групування складових, що впливають на змінну інтегрування $t$

$$\begin{aligned}&f_0\cdot(t-\Delta\tau)+\frac{b}{2}\cdot(t-\Delta\tau)^2-f_0\cdot(1-\Delta\nu)\cdot t-\frac{b}{2}\cdot(1-\Delta\nu)^2\cdot t^2=\\&=b\cdot\Delta\nu\cdot\left(1-\frac{\Delta\nu}{2}\right)\cdot t^2+\left(f_0\cdot\Delta\nu-b\cdot\Delta\tau\right)\cdot t+\left(\frac{b}{2}\cdot\Delta\tau^2-f_0\cdot\Delta\tau\right).\end{aligned}\qquad(6)$$

Позначимо: $b\cdot\Delta\nu\cdot\left(1-\frac{\Delta\nu}{2}\right)=A$; $f_0\cdot\Delta\nu-b\cdot\Delta\tau=B$. Тоді вираз (6) набуває вигляду

$$\begin{aligned}&f_0\cdot(t-\Delta\tau)+\frac{b}{2}\cdot(t-\Delta\tau)^2-f_0\cdot(1-\Delta\nu)\cdot t-\frac{b}{2}\cdot(1-\Delta\nu)^2\cdot t^2=\\&=\left(\sqrt{A}\cdot t\right)^2+B\cdot t+\left(\frac{b}{2}\cdot\Delta\tau^2-f_0\cdot\Delta\tau\right).\end{aligned}\qquad(7)$$

Виділимо у виразі (7) повний квадрат відносно змінної $t$ й отримаємо

$$\begin{aligned}&f_0\cdot(t-\Delta\tau)+\frac{b}{2}\cdot(t-\Delta\tau)^2-f_0\cdot(1-\Delta\nu)\cdot t-\frac{b}{2}\cdot(1-\Delta\nu)^2\cdot t^2=\\&=\left(\sqrt{A}\cdot t\right)^2+B\cdot t+\left(\frac{b}{2}\cdot\Delta\tau^2-f_0\cdot\Delta\tau\right)=\\&=\left(\sqrt{A}\cdot t\right)^2+2\cdot\sqrt{A}\cdot\frac{B}{2\cdot\sqrt{A}}\cdot t+\frac{B^2}{4\cdot A}-\frac{B^2}{4\cdot A}+\left(\frac{b}{2}\cdot\Delta\tau^2-f_0\cdot\Delta\tau\right)=\\&=\left(\sqrt{A}\cdot t+\frac{B}{2\cdot\sqrt{A}}\right)^2-\frac{B^2}{4\cdot A}+\left(\frac{b}{2}\cdot\Delta\tau^2-f_0\cdot\Delta\tau\right).\end{aligned}\qquad(8)$$

Обвідна модуля функції взаємної кореляції $\left|g(\Delta\tau,\,\Delta\nu)\right|$ прийнятого сигналу залежить тільки від змінної $t$. Таким чином, отримаємо

$$\left|g\left(\Delta\tau,\Delta\nu\right)\right| = \frac{1}{\tau_c}\cdot\left|\int\limits_{-\tau_c/2}^{\tau_c/2}\exp\left[j\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{A}\cdot t+\frac{B}{2\cdot\sqrt{A}}\right)^2\right]dt\right| \qquad (9)$$

Для приведення інтегралу (9) до табличного зробимо заміну змінної $\sqrt{A}\cdot t+\frac{B}{2\cdot\sqrt{A}}=z$ та враховуючи, що $dt=\frac{1}{2\cdot\sqrt{A}}dz$ й при $t=\pm\frac{\tau_c}{2}$ відповідно $z=\pm\sqrt{A}\cdot\tau_c+\frac{B}{\sqrt{A}}$, отримаємо

$$\begin{aligned}\left|g\left(\Delta\tau,\Delta\nu\right)\right| &= \frac{1}{\tau_c}\cdot\left|\int\limits_{-\tau_c/2}^{\tau_c/2}\exp\left[j\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{A}\cdot t+\frac{B}{2\cdot\sqrt{A}}\right)^2\right]dt\right| = \\ &= \frac{1}{2\cdot\tau_c\cdot\sqrt{A}}\cdot\left|\int\limits_{0}^{\sqrt{A}\cdot\tau_c+\frac{B}{\sqrt{A}}}\exp\left(\frac{\pi}{2}\cdot j\cdot z^2\right)dz-\int\limits_{0}^{-\sqrt{A}\cdot\tau_c+\frac{B}{\sqrt{A}}}\exp\left(\frac{\pi}{2}\cdot j\cdot z^2\right)dz\right|.\end{aligned} \qquad (10)$$

Під знаком модуля різниця інтегралів Френеля $\int\limits_0^a\exp\left(\frac{\pi}{2}\cdot j\cdot z^2\right)dz=C(a)+j\cdot S(a)$ [2, с 736].

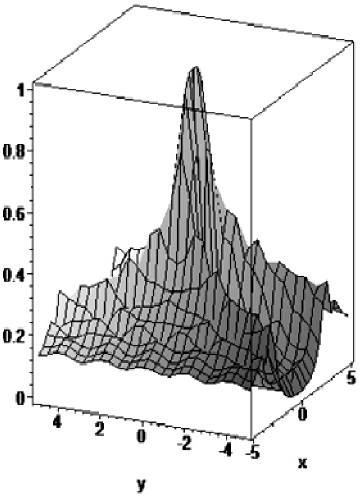
Для спрощення виразу (10) здійснимо другу заміну змінних $\sqrt{A}\cdot\tau_c=x$ й $B\cdot\tau_c=y$, та отримаємо

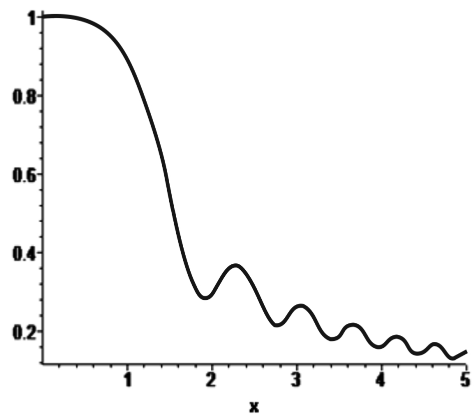
$$\begin{aligned}\left|g\left(\Delta\tau,\Delta\nu\right)\right| &= \frac{1}{2\cdot\sqrt{A}}\cdot\left|\int\limits_{0}^{\sqrt{A}\cdot\tau_c+\frac{B}{\sqrt{A}}}\exp\left(\frac{\pi}{2}\cdot j\cdot z^2\right)dz-\int\limits_{0}^{-\sqrt{A}\cdot\tau_c+\frac{B}{\sqrt{A}}}\exp\left(\frac{\pi}{2}\cdot j\cdot z^2\right)dz\right| = \\ &= \frac{1}{2\cdot x}\cdot\left|\left[C\left(\frac{y}{x}+x\right)+j\cdot S\left(\frac{y}{x}+x\right)\right]-\left[C\left(\frac{y}{x}-x\right)+j\cdot S\left(\frac{y}{x}-x\right)\right]\right| = \\ &= \frac{1}{2\cdot x}\cdot\sqrt{\left[C\left(\frac{y}{x}+x\right)-C\left(\frac{y}{x}-x\right)\right]^2+\left[S\left(\frac{y}{x}+x\right)-S\left(\frac{y}{x}-x\right)\right]^2}.\end{aligned} \qquad (11)$$

Таким чином, маємо модуль функції взаємної кореляції прийнятого ЛЧМ сигналу

$$\left|g\left(\Delta\tau,\Delta\nu\right)\right| = \frac{1}{2\cdot x}\cdot\sqrt{\left[C\left(\frac{y}{x}+x\right)-C\left(\frac{y}{x}-x\right)\right]^2+\left[S\left(\frac{y}{x}+x\right)-S\left(\frac{y}{x}-x\right)\right]^2}. \qquad (12)$$

Тіло невизначеності модуля функції (12), отримане за допомогою пакета прикладних програм “Maple”, зображене на рис. 1, а.




*а)* *б)*

*Рис. 1. Модуль функції взаємної кореляції прийнятого ЛЧМ сигналу з урахуванням ефекту Доплера: а – аксонометричне зображення тіла невизначеності; б – переріз тіла невизначеності вздовж лінії* $f_0 \cdot \Delta v - b \cdot \Delta\tau = 0$.

Аналіз виразу (12) на екстремум за допомогою прикладних програм "Maple" показує, що його максимум досягається при $y = 0$. Тоді

$$y = B \cdot \tau_c = \left(f_0 \cdot \Delta v - b \cdot \Delta\tau\right) \cdot \tau_c = 0. \quad (13)$$

Це означає, що гребінь тіла невизначеності розташовується уздовж лінії $f_0 \cdot \Delta v - b \cdot \Delta\tau = 0$. У цьому випадку форма тіла невизначеності залежить тільки від змінної *x*, яка характеризує неузгодженість за частотою Допплера й залежить від бази ЛЧМ сигналу. Дійсно

$$x = \sqrt{A} \cdot \tau_c = \tau_c \cdot \sqrt{b \cdot \Delta v \left(1 - \frac{\Delta v}{2}\right)} \approx \sqrt{\Delta f \cdot \tau_c \cdot |\Delta v|} \quad (14)$$

Таким чином, значення піку для випадку $y = 0$ визначається виразом

$$\left|g\left(\Delta\tau, \Delta v\right)\right| = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{C^2(x) + S^2(x)}. \quad (15)$$

Вид цієї функції наведений на рис. 1,б.

Допустиме допплерівське неузгодження відповідно до принципу "повної невизначеності" знаходиться із умови $\left|g\left(\Delta\tau, \Delta v\right)\right|^2 = 0,5$ [1,с. 150]. У виразі (15) ця умова досягається при значені *x* = 1,318 (результат отриманий за допомогою прикладних програм "Maple"). Використаємо дане значення у (14) й отримаємо вираз для допустимого допплерівського неузгодження

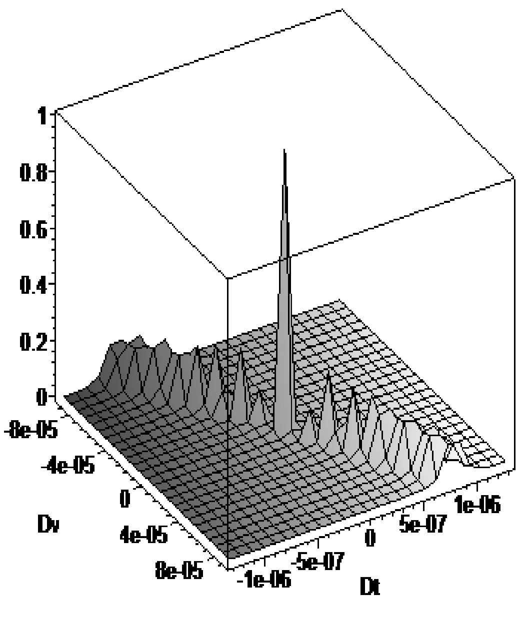
$$\Delta v = \pm \frac{1,737}{\Delta f \cdot \tau_c}. \quad (16)$$

Тоді розрізнення за радіальною швидкістю $\Delta v_r$ визначається за виразом

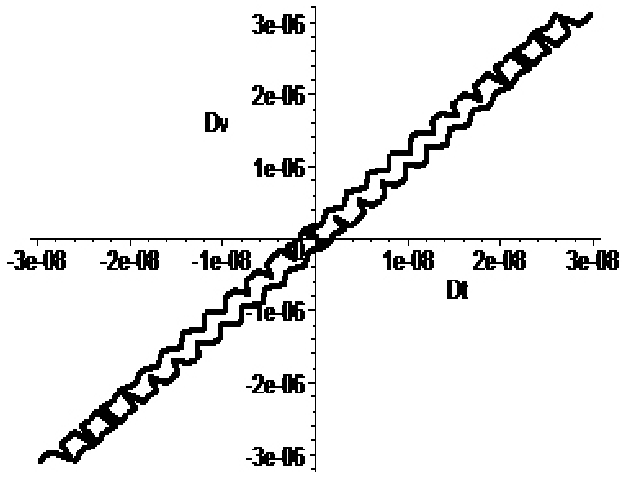
$$\Delta v_r = \frac{c}{2} \cdot \Delta v = \pm \frac{3 \cdot 10^8}{2} \cdot \frac{1,737}{\Delta f \cdot \tau_c} = \pm \frac{2,6 \cdot 10^8}{\Delta f \cdot \tau_c} \text{ (м/с).} \qquad (17)$$

Таким чином, урахування спотворення (зумовленого ефектом Допплера) швидкості зміни частоти ЛЧМ сигналу, що відбивається від рухомої цілі, дає математичну залежність розрізнювальної здатності за радіальною швидкістю від бази ЛЧМ сигналу: зростання бази ЛЧМ сигналу призводить до покращання розрізнювальної здатності за радіальною швидкістю.

Як приклад розглянемо багатофункціональну РЛС AN/FPS-108 американської системи контролю космічного простору, у якій використовується ЛЧМ сигнал з параметрами: $f_0$ =1200 МГц, $\Delta f$ = 200 МГц, $\tau_c$ = 1,5 мс [4, с. 60]. Тіло невизначеності й діаграма невизначеності такого ЛЧМ сигналу наведені на рис. 2а й 2б, відповідно, (на зазначених рисунках прийняті позначення: $Dt = \Delta\tau$, $Dv = \Delta v$).




*а)*




*б)*

*Рис. 2. Кореляційні характеристики ЛЧМ сигналу РЛС AN/FPS-108 з урахуванням ефекту Доплера:*
*а – аксонометричне зображення тіла невизначеності;*
*б – діаграма невизначеності.*

Розрізнювальна здатність РЛС AN/FPS-108 за радіальною швидкістю при використанні вказаного ЛЧМ сигналу, розрахована за допомогою формули (17), тобто з урахуванням впливу ефекту Допплера на параметр модуляції, дорівнює ±860 м/с. Таке розрізнення є досить інформативним для радіолокаційної оцінки радіальної швидкості космічних об’єктів природного й штучного походження.

Без урахування допплерівського спотворення розрізнення за радіальною швидкістю для ЛЧМ сигналу з прямокутною обвідною визначається за формулою $\Delta v_r = \pm\Delta f \cdot c / 2 \cdot f_0$ [5, с. 878]. Для РЛС AN/FPS-108 розрізнення за радіальною швидкістю, без урахування допплерівського спотворення швидкості зміни частоти ЛЧМ сигналу, становить $\pm 25 \cdot 10^6$ м/с. Настільки суттєво відмінні результати оцінки розрізнення за радіальною швидкістю зумовлені тим, що ефект Допплера в останньому випадку враховується тільки зміщенням частоти ЛЧМ сигналу.

**Висновки:**

1. Отримана взаємно кореляційна функція імпульсного ЛЧМ радіолокаційного сигналу з урахуванням впливу ефекту Допплера на швидкість зміни його частоти й побудовано її тіло невизначеності.

2. Показано, що повне врахування допплерівського ефекту на радіолокаційний ЛЧМ сигнал створює можливість позбавлення від невизначеності "дальність-швидкість" й суттєвого підвищення розрізнювальної здатності РЛС за радіальною швидкістю цілей. Розрізнювальна здатність за радіальною швидкістю цілей РЛС із ЛЧМ зондувальним сигналом обернено пропорційна базі цього сигналу.

3. При значеннях бази ЛЧМ сигналу більше $10^5$ виникає практична можливість моно імпульсного оцінювання дальності радіолокаційних цілей за часом затримки стиснутого ЛЧМ сигналу й радіальної швидкості за величиною зміни його параметра модуляції.

## ДЖЕРЕЛА ТА ЛІТЕРАТУРА


1. Кук Ч. Радиолокационные сигналы : пер. с англ. под ред. В. С. Кельзона/ Ч. Кук, М. Бернфельд. – М. : Сов. Радио, 1971. – 368 с.

2. Мрачковський О.Д. О деградации функции неопределенности широкополосного зондирующего сигнала с линейной внутриимпульсной частотной модуляцией /О.Д. Мрачковський, В.Е. Бычков, А.А. Олейник // Вісник Національного технічного університету "КПІ". Серія – Радіотехніка. – 2009. – № 38. – С. 41-45.

3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров : пер. с англ. под общ. ред. И.Г. Арамановича / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1981. – 832 с.

4. Павлов В. Американские многофункциональные РЛС / В. Павлов // Зарубежное военное обозрение. – 1984. – №1. – С. 59-62.

5. Stewart J. L. A theory of active sonar detection / J. L. Stewart, E. C. Westerfield//. – Proc. IRE, vol. 47, pp. 872 – 881, May 1959/.