УДК 372.851

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ДО АНАЛІЗУ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Н. В. Гонгало
старший викладач
С. О. Яцковий
студент
Житомирський національний агроекологічний університет

В роботі розглянуто застосування орієнтовних графів до аналізу технічних систем. Наводиться метод, розроблений в числі інших Трентом, який найбільш широко використовується для аналізу електричних ланцюгів.

Ключові слова*: *орієнтований граф, технічні системи, електричні ланцюги, правило вершин, циклічне правило.

В работе рассмотрено применение ориентированых графов к анализу технических систем. Приводится метод, разработанный в числе других Трентом, который наиболее широко используется для анализа электрических цепей.

Ключевые слова: *ориентированный граф, технические системы, электрические цепи, правило вершин, циклическое правило.*

Компетентність інженера необхідно формувати в процесі навчання не тільки спеціальним, а і загальним дисциплінам. Особлива роль належить математиці, яка є і універсальною мовою опису та вивчення предметного світу, і формує мислення майбутніх інженерів.

Найбільш важливим засобом математичного моделювання різних аспектів професійної діяльності інженера є розв’язання професійно-орієнтовних задач. Під час навчання дисципліни «Дискретна математика» студенти зі спеціальності «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» вивчають теорію графів, практичне застосування яких в професійній діяльності буде корисним та цікавим.

Граф $G = (V, E)$ складається з двох множин: кінцевої безлічі елементів, званих вершинами, і кінцевої безлічі елементів, званих ребрами. Кожне ребро визначається парою вершин. Якщо ребра графа визначаються впорядкованими парами вершин, то G називається спрямованим або орієнтованим графом. Орієнтовані ребра називаються також дугами. Формально, орграф є множина впорядкованих пар вершин [2].

Одною з форм представлення графа є матриця інцидентності, в якій вказуються зв'язки між елементами графа (дуга і вершина). Стовпці матриці відповідають ребрам, рядки — вершинам. Ненульове значення у клітинці матриці вказує на зв'язок між вершиною і ребром (їх інцедентність). Дуга $\{u, v\}$ инцидентна до вершин u і v. При цьому говорять, що u — початкова вершина дуги, а v — кінцева вершина. Цикл у графі - це шлях, у якому збігаються початкова і кінцева вершини.

Покажемо як можна використовувати побудовані відповідним чином орієнтовні графи для отримання суттєвої інформації про поведінку реальних технічних систем на основі інформації, що характеризує їх складові частини при заданому способі зв’язку цих частин.

Показаний нижче метод, розроблений в числі інших Трентом, найбільш широко використовується для аналізу електричних ланцюгів [1]. Однак, він може застосовуватися також і до інших систем, у яких відбувається перетворення енергії, наприклад, до механічних пристроїв з поступальними або обертовими рухами, або до гідравлічних систем. Окрім «чистих» систем (тобто таких, що використовують лише один вид енергії) цей метод можна використовувати для «змішаних» систем, в яких різні елементи працюють з різними видами енергії і пов'язані між собою через відповідні пристрої узгодження [1].

Розглянемо набір із m двохполярників, які утворюють елементи системи $E_1, \ldots, E_m$. Нехай клеми двохполярників з'єднані певним чином в n вузлах $P_1, \ldots, P_n$. Прикладом такої системи слугує набір опорів, конденсаторів, індуктивностей та джерел напруг (в найпростішому випадку – батареї, в більш складних випадках – джерела змінної напруги). Припустимо, що кожний окремий елемент системи можна адекватно охарактеризувати відомим рівнянням, яке зв'язує дві основні змінні: струм x_i і напругу y_i елемента E_i . Вважається, що x_i та y_i вимірюються в певному напрямку. Вибір змінних і використовування термінів «струм» і «напруга» будуть скоро зрозумілі.

Якщо, наприклад, x_i та y_i позначають електричний струм і різницю потенціалів відповідно, то пасивний елемент (елемент, який не є джерелом) може характеризуватися одним з рівнянь виду:

$$y_i = kx_i - \text{опір},$$

$$y_i = k\frac{d}{dt}x_i - \text{індуктивність},$$

$$y_i = k\int_{t_0}^{t} x_i\, dt - \text{конденсатор},$$

де t позначає час. Активний елемент або джерело, характеризується рівнянням, яке відображає одну з основних змінних як функцію часу (може бути і константою). Наприклад, $y_i=f(t)$ характеризує джерело напруги.

Припустимо тепер, що кожному елементу E відповідає дуга a_i, а кожному вузлі P_j – вершина υ_j. Якщо кінцеві точки дуг взяти в якості відповідних вузлів, то отриманий орієнтований граф дає зручну характеристику структури, яка відображає структуру реальної технічної системи. Важлива для нашого розгляду якість струмів полягає в тому, що в кожній вершині їхня поведінка підпорядкована так званому правилу вершин. Воно полягає в наступному.

Правило вершин. Алгебраїчна сума струмів, які відповідають дугам, інцидентним будь-якій заданій вершині, дорівнює нулю.

Під алгебраїчною сумою мається на увазі наступне: кожний струм додається або віднімається залежно від того, чи є відповідна дуга додатною або від'ємно інцидентною вершиною, яка розглядається. На рис.1 правило виконується, наприклад, в υ_1, тому що (4) - (7) - (3) = 0. Не важко побачити , що воно виконується і в інших вершинах. В теорії електричних ланцюгів це правило називається законом Кірхгофа для струмів. В загальному випадку, в якості базисних змінних, а саме тієї, яка має сенс струму, повинна вибиратися змінна, розмірність якої забезпечує виконання умов правила вершин.

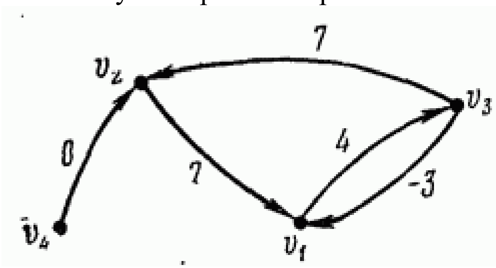

Рис. 1.

Напруга також задовольняє наступне основне так зване циклічне правило.

Циклічне правило. Алгебраїчна сума напруг, що відповідають дугам будь-якого елементарного цикла, дорівнює нулю.

У цьому випадку припускається, що циклу задається певна орієнтація (в будь-якому напрямку), і кожна напруга додається або віднімається залежно від того, співпадає чи не співпадає напрямок відповідної дуги з вибраної орієнтацією циклу. На рис. 2 це правило працює, наприклад, для орієнтовного елементарного цикла *C*, так як (3) – (-2) + (-4) – (1) = 0. Можемо перевірити, що правило виконується для всіх інших п'яти елементарних циклів цього графа.

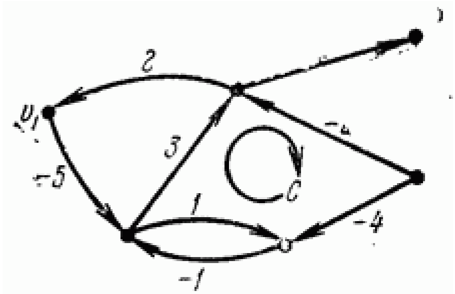

Рис. 2

В теорії електричних ланцюгів циклічному правилу відповідає закон Кірхгофа для напруг.

Наведемо ще одне формулювання циклічного правила. Якщо υ_1 - фіксована вершина, а υ_i – будь-яка інша вершина, відмінна від υ_1,то алгебраїчна сума напруг для будь-якого ланцюга, орієнтовного від υ_1 до υ_i не залежить від вибраного ланцюга. (Тут припускається, що граф зв'язаний і, таким чином, є принаймні один такий ланцюг.)

Використовуючи це формулювання для кожної вершини υ_j, ми можемо визначити числа S_j таким чином. Призначимо S_1 довільно. Припустимо, що $S_j=S_1-K$, де K - алгебраїчна сума напруг по будь-якому ланцюгу, спрямованому від υ_1 до υ_j. Припускаючи, наприклад, $S_1=3$ у попередньому прикладі, ми отримаємо значення S_j, показані на рис. 3.

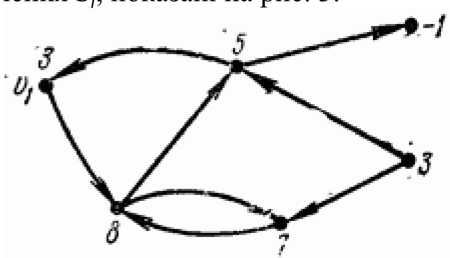

Рис. 3.

Напругу визначають значення S_j з точністю до адитивної константи. В якості початкової можна вибрати будь-яку зручну вершину. В електротехніці величини S_j можуть розглядатися як потенціали відносно вибраного потенціалу вихідної вершини.

Очевидно, величини напруги відповідатимуть різницям потенціалів.

Процес отримання рівнянь, що характеризують систему в цілому, на основі рівнянь її елементів і заданої структури приводиться в два етапи. Спочатку за допомогою правила вершин і циклічного правил зменшується кількість змінних, які відповідають струмам і напругам. У результаті виділяється множина незалежних змінних, через які можна виразити всі змінні системи. Потім виписуються рівняння зв’язку змінних струму і напруги.

Список використаних джерел

1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974. - 368 с.
2. Трохимчук Р. М. Теорія графів: Навч. посібник для студ. ф-ту кібернетики / Київський ун-т ім. Тараса Шевченка. — К.: РВЦ «Київський університет», 1998.
3. Бардачов Ю. М. Дискретна математика / Ю. М. Бардачов, Н. А. Соколова, В. Є. Ходаков. – К.: Вища освіта, 2002. – 287 с.