УДК 550.348.0985: 551.14б

Ю. Б. Бродський
к. т. н.
О. В. Маєвський
к. т. н.
С. М. Васько
к. т. н.
Житомирський національний агроекологічний університет

АНАЛІЗ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДИНАМІКИ РОЗВИТКУ ЕКОСИСТЕМИ «ХИЖАК – ЖЕРТВА»

В статті проведено аналіз фазових траєкторій екологічної системи типу «хижак – жертва» при застосуванні математичних моделей динаміки взаємодії популяцій з робочими параметрами, отриманими на основі реальних даних для північного регіону

Житомирської області. Оцінена стійкість екологічної системи та зроблений висновок про можливість порушення рівноваги і переходу до хаотичного стану. В залежності від характеру власних чисел Якобіану, зроблено висновки стосовно типу розрахованих точок рівноваги. Обґрунтована необхідність управління хаотичною динамікою з метою попередження кризисних явищ та виникнення екологічної катастрофи. В результаті досліджень показано адекватне відтворення процесу взаємодії «хижак – жертва», описаного за допомогою математичних моделей, побудованих на основі узагальненої моделі еволюції систем на відміну від моделей, побудованих на базі функції Ферхюльста.

Ключові слова: *математична модель, фазові траєкторії, система «хижак – жертва», динаміка екосистеми, обчислювальний експеримент.*

Постановка проблеми

Диференціальні рівняння, які описують взаємодію типу «хижак – жертва», включають нелінійні елементи. Для вивчення нелінійних систем та наглядної демонстрації процесів, які вони описують, використовується фазовий простір, де створюються фазові портрети. У кожної динамічної системи є свій портрет.

На фазовому портреті є особливі точки – точки знаходження рівноваги. За допомогою визначення цих точок можливо передбачити поведінку динамічної системи.

В залежності від характеру власних чисел Якобіану, ці точки можуть мати різний характер (бути стійкими, або нестійкими). Тобто, якщо система знаходиться в околиці точки рівноваги, то невеликі коливання не порушать рівновагу системи. Якщо ж точка рівноваги не стійка, то з часом малі коливання будуть прогресувати, і система буде втрачати стійкість. Такі задачі є некоректно поставленими [1]. У зв'язку з чим дослідження процесів у реальних системах провести аналітично часто не вдається, тому вирішення цієї проблеми лежить у площині застосування обчислювального експерименту та інформаційних технологій. Саме завдяки інформаційним технологіям можна проаналізувати динаміку системи «хижак – жертва» на різних режимах функціонування математичних моделей, що описують цю систему.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Некоректно поставлені задачі [1], які виникають при дослідженні динаміки екологічних систем [2], призводять до нагальної потреби феноменолізації відомих математичних моделей взаємодії «хижак – жертва» і організації обчислювального експерименту [3]. Зокрема, математичні моделі взаємодії «хижак – жертва», побудовані на основі функції Ферхюльста [4, 5] при певних умовах (стабільність зовнішніх умов) дають неадекватні результати моделювання. Тому для дослідження і порівняння динаміки розвитку взаємодії «хижак – жертва» застосовується і математична модель, побудована на основі узагальненої моделі еволюції систем [6, 7, 8]. При цьому, побудова фазових траєкторій для різних значень робочих параметрів математичних моделей, демонструє характер динаміки взаємодії та висвітлює ділянки стійкості систем нелінійних дифенційних рівнянь [9], якими представлено відповідні математичні моделі.

Мета, завдання та методика досліджень

Перед усім слід зазначити, що дослідження фазових портретів має широкий спектр застосування, як при дослідженні технічних систем, так і різноманітних реальних процесів та явищ. Зокрема, при дослідженні взаємодії екосистем [2], закономірності їхньої динаміки висвітлює саме побудова фазових траєкторій.

Враховуючи складність механізмів взаємодії таких систем і, в більшості випадків, неможливості отримати аналітичний розв’язок систем нелінійних диференціальних рівнянь динаміки взаємодії, необхідно організовувати обчислювальний експеримент [3].

В даній роботі обчислювальний експеримент організовано для математичних моделей взаємодії «хижак – жертва», побудованих як на базі функції Ферхюльста [4, 5], так і на основі узагальненої моделі еволюції систем [6, 7].

Необхідно зауважити, що побудова фазових траєкторій можлива тільки після розв’язку задачі ідентифікації робочих параметрів досліджуваних моделей. Для проведення розрахунків використовується система Mathcad та отримані раніше результати ідентифікації математичних моделей взаємодії «хижак – жертва» на прикладі взаємодії екосистем, представлених множиною визначених хижаків та жертв на території Житомирської області [8].

У результаті досліджень показано адекватне відтворення процесу взаємодії «хижак – жертва», описаного за допомогою математичних моделей, побудованих на основі узагальненої моделі еволюції систем на відміну від математичних моделей, отриманих на базі функції Ферхюльста [4, 5] на прикладі взаємодії екосистем [2] для короткострокового прогнозування. А також оцінено стійкість розв’язків відповідних систем нелінійних диференціальних рівнянь [9].

Для реалізації поставлених задач, виникає необхідність застосування одного з відомих чисельних методів. Для розв’язку даної задачі використано метод Рунге – Кутти з фіксованим кроком [10].

Результати досліджень

Для врахування зовнішніх факторів впливу в роботі використовується узагальнена модель еволюції систем, яка представлена нелінійним диференційним рівнянням першого порядку [6]

$$\left(1 + a_1 x(t)\right)\frac{dx(t)}{dt} = \varphi x(t) - a_0 x^2(t), \tag{1}$$

де x − кількість елементів екосистеми, φ − потенціал експоненціального зростання, a_1 і a_0 − параметри, що стримують експоненційний розвиток екосистеми.

Існуюча математична модель «хижак – жертва» [4, 5] на основі функції Ферхюльста представлена системою двох нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a_0 x^2 - \varphi x = -\gamma z; \\ \dfrac{dz}{dt} + b_0 z^2 - \psi x = \gamma x. \end{cases}, \qquad (2)$$

і призначена для визначення кількості особин хижака і жертви, без врахування ефекту дифузії.

З урахуванням рівняння (1), система диференціальних рівнянь (2) перетворюються в систему

$$\begin{cases} (1 + a_1 x)\dfrac{dx}{dt} + a_0 x^2 - \varphi x = -\gamma z; \\ (1 + b_1 x)\dfrac{dz}{dt} + b_0 z^2 - \psi x = \gamma x, \end{cases} \qquad (3)$$

де x і z − кількість елементів взаємодіючих природних систем, φ та ψ − потенціали экспоненціального зростання, a_1, b_1, a_0, b_0 − параметри, які стримують експоненціальний розвиток природних систем, де також не враховується ефект дифузії [6].

Робочі параметри математичних моделей (2), (3), які використовуються при побудові їх фазових траєкторій, входять у розрахований діапазон за результатами розв'язку задачі ідентифікації [8] і представлені в табл. 1.

Використовуючи програмний пакет Mathcad і дані табл. 1, встановимо особливі точки для математичних моделей (2) і (3) та визначимо характер цих точок, виходячи із значень власних чисел Якобіану для першої групи робочих параметрів.

Таблиця 1. **Робочі параметри математичних моделей (2), (3)**

Модель	φ	γ	ψ	a_0	b_0	a_1	b_1
2	2,245	1,831	-38,32	$2{,}7\cdot10^{-5}$	$1{,}99\cdot10^{-2}$	0,00	0,00
3	0,394	0,703	-15,148	$1{,}4\cdot10^{-6}$	$-1{,}26\cdot10^{-3}$	$-9{,}80\cdot10^{-6}$	$-2{,}74\cdot10^{-4}$
Модель	φ	γ	ψ	a_0	b_0	a_1	b_1
2	2,20	3,831	-6,00	$1{,}80\cdot10^{-5}$	$2{,}00\cdot10^{-2}$	0,00	0,00
3	-0,34	-7,35	-15,883	$5{,}003\cdot10^{-6}$	$-7{,}31\cdot10^{-3}$	$-9{,}03\cdot10^{-6}$	$-3{,}45\cdot10^{-3}$

Для математичної моделі (2) особливою точкою (точка рівноваги) є точка (0; 0), інші точки не мають фізичного змісту, оскільки дають від'ємні значення для точок рівноваги. Значення Якобіану для точки рівноваги і відповідні значення його власних чисел для математичної моделі (2) наведено нижче:

$$A1 = \begin{pmatrix} 2.245 & -1.831 \\ 1.831 & -38.32 \end{pmatrix} \qquad \lambda := \text{eigenvals}(A1) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 2.162 \\ -38.237 \end{pmatrix}$$

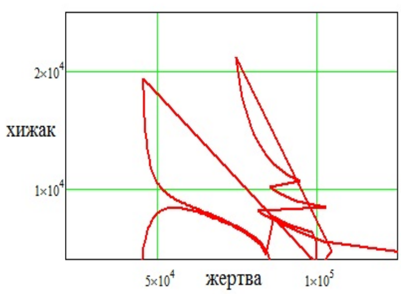
Виходячи з характеру отриманих значень для власних чисел λ ,робимо висновок, що точка (0; 0) є «сідлова точка» для математичної моделі 2 при конкретних значеннях її робочих параметрів. Для математичної моделі 3 особливими точками (точки рівноваги) є точка (0; 0) і точка (21114.6; 10945.9), де на першій позиції вказано чисельність жертви, а на другій позиції чисельність хижака. Значення Якобіану для точок рівноваги і відповідні значення його власних чисел для математичної моделі (3) наведено нижче:

$$A1 = \begin{pmatrix} 0.394 & -0.703 \\ 0.703 & -15.148 \end{pmatrix} \qquad \lambda := \text{eigenvals}(A1) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 0.362 \\ -15.116 \end{pmatrix}$$

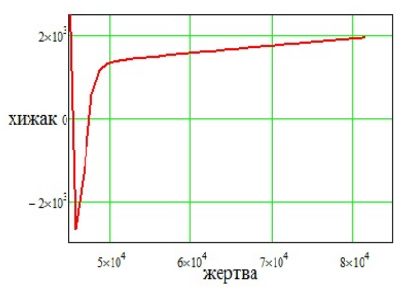
$$A2 = \begin{pmatrix} 0.422 & -0.887 \\ -0.351 & -6.217 \end{pmatrix} \qquad \lambda1 := \text{eigenvals}(A2) \qquad \lambda1 = \begin{pmatrix} 0.469 \\ -6.264 \end{pmatrix}$$

Аналізуючи характер отриманих значень для власних чисел λ, робимо висновок, що точки (0; 0) і (21114.6; 10945.9) є «сідловими точками» для математичної моделі (3) при конкретних значеннях її робочих параметрів.

Перейдемо до побудови фазових портретів для математичних моделей 2 і 3, виходячи з результатів ідентифікації їх робочих параметрів та заданих початкових умов. Нагадаємо, що процес взаємодії «хижак – жертва» досліджується на прикладі пари «лисиця – заєць» (ХЖ) для території Житомирської області. Результати побудови фазових портретів представлено на рис. 1 *а,б*, а залежності від часу динаміки жертви та хижака на рис. 2 *а,б* та 3 *а,б*.

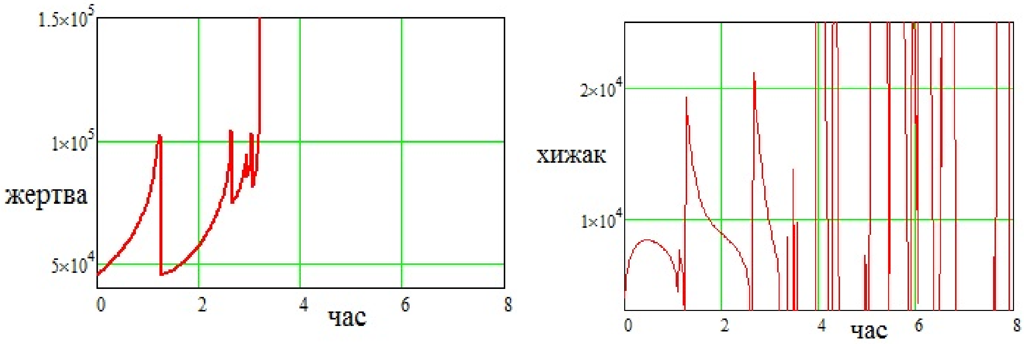


а)



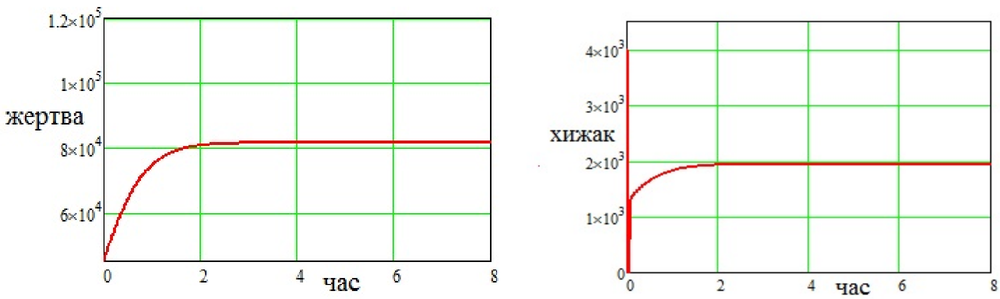
б)

Рис. 1. **Фазові портрети для математичних моделей взаємодії «хижак – жертва»; а) для математичної моделі (3), б) для математичної моделі (2)**



а) *б)*

Рис. 2. **Динаміка для математичної моделі (3); а) для жертви, б) для хижака. Час позначено в умовних одиницях**



а) *б)*

Рис. 3. **Динаміка для математичної моделі (2); а) для жертви, б) для хижака. Час позначено в умовних одиницях**

Аналогічні дослідження для другої групи робочих параметрів з табл. 1 дають наступні результати:

Для математичної моделі (2) особливою точкою (точка рівноваги) є точка (0; 0), інші точки не мають фізичного змісту, оскільки дають від'ємні значення для точок рівноваги. Значення Якобіану для точки рівноваги і відповідні значення його власних чисел для математичної моделі (2) наведено нижче:

$$A1 = \begin{pmatrix} 2.2 & -3.831 \\ 3.831 & -6 \end{pmatrix} \quad \lambda := \mathrm{eigenvals}(A1) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -0.439 \\ -3.361 \end{pmatrix}$$

Виходячи з характеру отриманих значень для власних чисел λ робимо висновок, що точка (0; 0) є «стійкий вузол» для математичної моделі (2) при конкретних значеннях її робочих параметрів. Для математичної моделі (3) особливими точками (точки рівноваги) є точка (0; 0) і точка (97999.5; 11070.49), де на першій позиції вказано чисельність жертви, а на другій позиції чисельність хижака. Значення Якобіану для точок рівноваги і відповідні значення його власних чисел для математичної моделі (3) наведено нижче:

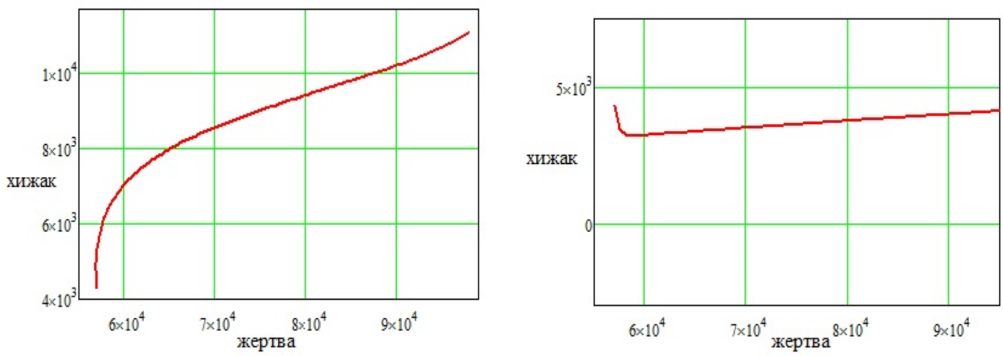
$$A1 = \begin{pmatrix} -0.34 & 7.35 \\ -7.35 & -15.883 \end{pmatrix} \qquad \lambda := \mathrm{eigenvals}(A1) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -5.587 \\ -10.636 \end{pmatrix}$$

$$A2 = \begin{pmatrix} -11.496 & 63.986 \\ 0.197 & -3.919 \end{pmatrix} \qquad \lambda1 := \mathrm{eigenvals}(A2) \qquad \lambda1 = \begin{pmatrix} -12.902 \\ -2.514 \end{pmatrix}$$

Аналізуючи характер отриманих значень для власних чисел λ, робимо висновок, що точки (0; 0) і (97999.5; 11070.49) є точками типу «стійкий вузол» для математичної моделі (3) при конкретних значеннях її робочих параметрів (друга група робочих параметрів, див. табл.1).

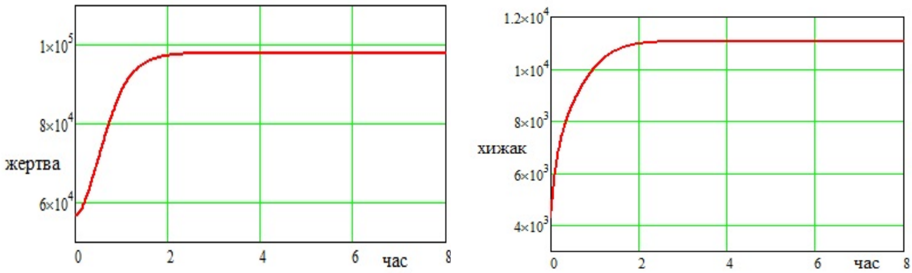
Перейдемо до побудови фазових портретів для математичних моделей (2) і (3), виходячи з результатів ідентифікації їх робочих параметрів та заданих початкових умов.

Результати побудови фазових портретів представлено на рис. 4 *а,б*, а залежності від часу динаміки жертви та хижака на рис. 5 *а,б* та 6 *а,б*.



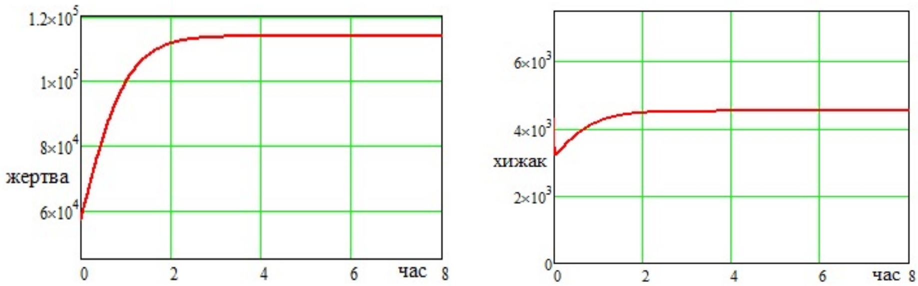
а) *б)*

Рис. 4. **Фазові портрети для математичних моделей взаємодії «хижак – жертва»; а) для математичної моделі (3), б) для математичної моделі (2)**



а) *б)*

Рис. 5. **Динаміка для математичної моделі (3); а) для жертви, б) для хижака. Час позначено в умовних одиницях**



а) *б)*

Рис. 6. **Динаміка для математичної моделі (2); а) для жертви, б) для хижака. Час позначено в умовних одиницях**

Результати моделювання, представлені на рисунках 1–6, демонструють реальну динаміку взаємодії типу «хижак–жертва» з використанням запропонованої та існуючої математичних моделей для конкретних значень робочих параметрів та початкових умов з використанням відповідного програмного забезпечення. Зокрема з рис. 1 *а* видно, що на другому році екологічна система переходить до хаотичної динаміки, що може спричинити неконтрольоване зростання, або, навпаки, виродження хижаків чи жертв. Як наслідок, виникає нагальна потреба в управлінні хаотичною динамікою.

Висновки та перспективи подальших досліджень

При дослідженні фазових траєкторій отримані наступні результати: запропонована модель взаємодії «хижак – жертва» не має граничного циклу; особливі точки характеризуються як «сідлові» та «стійкий вузол» у залежності від характеру власних чисел Якобіану. Дослідження характеру інших можливих особливих точок систем потребує додаткового дослідження шляхом отримання компонентів більш високого порядку при розкладенні в ряд Тейлора.

Необхідно відмітити, що побудова фазових траєкторій для аналізу та прогнозування реальної динаміки системи можлива тільки після визначення робочих параметрів моделей. Отримані результати указують на ділянки стійкості системи і результати короткострокового прогнозування відображають реальний процес у межах допустимих відхилень.

Побудова фазових траєкторій також доводить адекватність удосконаленої математичної моделі взаємодії «хижак – жертва», що отримана на основі узагальненої моделі еволюції систем [7], а також з'ясовує зв'язок між реальною динамікою хижака і жертви для конкретних значень робочих параметрів математичних моделей при короткостроковому прогнозуванні.

При збільшенні терміну прогнозування процесів у системі, що досліджується до двох років, вона переходить через подвійний період до хаотичної динаміки, що може спричинити неконтрольоване зростання або виродження популяцій, тобто порушення рівноваги і переходу до хаотичного стану. Як наслідок, виникає нагальна потреба в управлінні хаотичною динамікою, з метою попередження кризисних явищ та виникнення екологічної катастрофи.

Проблема довгострокового прогнозу динаміки систем типу «хижак – жертва» може бути вирішена при застосуванні інших підходів з використанням інструментарію теорії ймовірностей та імітаційного моделювання.

Література

1. Хозяинова М. Г. К вопросу о применении методов регуляризации для идентификации технологических систем / М. Г. Хозяинова // Фундаментальные исследования. – 2007. – № 8. – С. 45–47.

2. Добровольський В. В. Основи теорії екологічних систем : [навч. посіб.] / В. В. Добровольський. – К. : Професіонал, 2005. – 272 с.

3. Самарский А. А. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1988. – 176 с.

4. Маевский А. В. Математические модели межвидовой конкуренции / А. В. Маевский, І. А. Пилькевич // Современный научный вестник. – 2014. – № 17 (213). – С. 88–93.

5. Ризниченко Г. Ю. Математические модели биологических продукционных процес сов : учеб. пособие / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – М. : Изд-во МГУ, 1993. – 302 с.

6. Бродський Ю. Б. Моделювання природних процесів взаємодії з урахуванням невизначенності в початкових умовах задачі Коші / Ю. Б. Бродський, О. В. Маєвський // ScienceRise. – 2016. – № 9/2 (26). – С. 24–30.

7. Грабар І. Г. Універсальна модель системи: методологічний аспект / І. Г. Грабар, Ю. О. Тимонін, Ю. Б. Бродський // Віс. ЖНАЕУ. – 2009. – № 1. – С. 358–366.

8. Маевский А. В. Решение задачи идентификации рабочих параметров математической модели процесса динамики экологических систем / А. В. Маевский // Электронное моделирование. – 2016. – № 2, т. 38. – С. 105–115.

9. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин, И. З. Штокало, П. С. Бондаренко [и др.]. – К. : Вища шк., 1974. – 472 с.

10. Калиткин Н. Н.Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.