Ю. Б. Бродський, к. т. н., доцент,
О. В. Маєвський, ст. викладач,
кафедри комп'ютерних технологій і моделювання систем,
А. В. Філон, студент

ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВЗАЄМОДІЇ В СИСТЕМАХ НА ПРИКЛАДІ МОДЕЛІ «ХИЖАК – ЖЕРТВА»

Постановка проблеми. При моделюванні широкого спектру задач, значна увага приділяється питанням ідентифікації робочих параметрів відповідних моделей. Робочі параметри математичних моделей, як правило, невідомі і можуть бути оцінені за допомогою аналізу експериментальних даних реакцій досліджуваного об'єкту.

Багато задач параметричної і непараметричної ідентифікації, обробки експериментальних даних та чисельного аналізу відносяться до класу некоректно поставлених задач [1].

Характерною рисою таких завдань є нестійкість їх вирішення: малі зміни початкових даних можуть довільно викликати великі зміни рішень, тобто похибка вихідних даних може грати принципову роль. Ця нестійкість при наявності похибок в даних призводить до того, що рішення не буде єдиним, а також виникнуть труднощі у з'ясуванні змісту отриманого рішення. Тому дослідження цього питання є актуальним для задач різного типу з незначним об'ємом апріорної інформації про досліджуваний об'єкт. Для дослідження обрано об'єкт системного характеру, а саме екосистему типу «хижак – жертва» в зв'язку зі значним об'ємом наявних статистичних даних та з відносно невеликою частотою їх коливань (в статистичних даних, період обліку становить в основному 1 рік).

Аналіз останніх джерел та публікацій. Як відомо, в екосистемах [2] дослідження більшості процесів призводить до необхідності розв'язання багатофакторних задач, що являє собою складну математичну проблему, яка призводить до виникнення некоректно поставленої задачі.

Для розв'язку задач такого роду може бути використані два основних підходи. Перший підхід полягає у визначенні апріорної інформації для виключення невизначеності та отримання можливості вирішити коректно поставлене завдання одним з чисельних методів. Другий підхід передбачає застосування методів регуляризації [3]. Неможливість проведення «активного» експерименту (дослідження реакції системи на тестовий вплив) ускладнює розв'язок задачі ідентифікації робочих параметрів математичних моделей процесу взаємодії «хижак – жертва». Перший підхід також звужено рамками апріорної інформації, яка у випадку екосистеми може бути представлена в основному множиною статистичних даних. При цьому слід врахувати, що статистичні дані можуть включати систематичні, випадкові і грубі похибки з різними законами розподілу. Походження цих погрішностей пов'язано в основному з точністю методів збору статистичних даних і безпосередньо з професіоналізмом відповідних спеціалістів. Недостатня вивченість впливу похибок в статистичних даних на результати моделювання призводить до недостовірних результатів моделювання за допомогою існуючих математичних моделей, демонструючи при цьому їх неадекватність при певних умовах, таких як стабільність зовнішніх умов.

Таким чином, розв'язок задачі Коші з частковою невизначеністю в початкових умовах та задачі ідентифікації робочих параметрів повинен забезпечити доведення адекватності узагальненої моделі еволюції систем [4] і математичних моделей «хижак – жертва» як з урахуванням ефекту дифузії [5, 6], так і без нього, побудованих на її основі [7], в порівнянні з розповсюдженою функцією Ферхюльста [8] і математичних моделей взаємодії на базі цієї функції.

Результати дослідження. Відома математична модель «хижак – жертва» [9] на основі функції Ферхюльста представлена системою двох нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a_0 x^2 - \varphi x = -\gamma z; \\ \dfrac{dz}{dt} + b_0 z^2 - \psi x = \gamma x. \end{cases} \quad , \qquad (1)$$

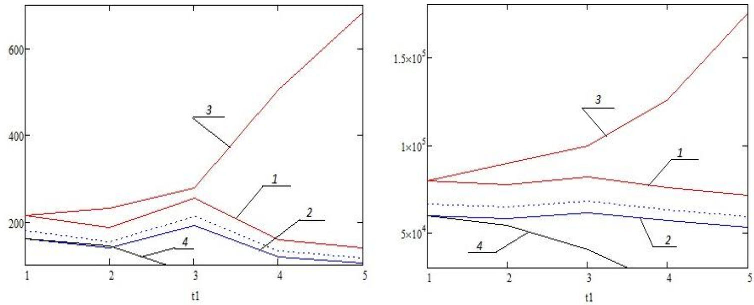
і призначена для визначення кількості особин хижака і жертви, де не враховується ефект дифузії.

З урахуванням узагальненої моделі еволюції систем [9], диференціальні рівняння (1) перетворюються в систему:

$$\begin{cases} (1 + a_1 x)\dfrac{dx}{dt} + a_0 x^2 - \varphi x = -\gamma z; \\ (1 + b_1 x)\dfrac{dz}{dt} + b_0 z^2 - \psi x = \gamma x, \end{cases} \qquad (2)$$

де x і z – кількість елементів взаємодіючих природних систем, φ та ψ – потенціали экспоненціального зростання, a_1, b_1, a_0, b_0 – параметри, які стримують экспоненціальний розвиток природних систем, де також не враховано ефект дифузії.

Виходячи з результатів ідентифікації робочих параметрів [10] математичної моделі (2), розв'язок задачі Коші для неї (на прикладі пари «вовк – заєць» (ХЖ1) для території Житомирської області) представлено на рис. 1 а, б.



а) б)

1, 2 – верхня і відповідно нижня границі статистичних даних жертви і хижака; 3, 4 – верхня і відповідно нижня границі результатів моделювання динаміки жертви і хижака

Рис.°1. Розв'язок задачі Коші з невизначеністю в початкових умовах для взаємодіючих екологічних систем «хижак – жертва» використовуючи математичну модель (2); а) для жертви (заєць), б) для хижака (вовк)

Для завершення досліджень, необхідно визначитись з законом розподілу чисельності результатів моделювання в розрахованих межах. Виходячи з положень центральної граничної теореми, в першому наближенні можна вважати закон розподілу нормальним. Тоді сумісна щільність хижаків і жертв визначатиметься наступним чином:

$$f(x,z)=(\frac{1}{2\pi\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\sqrt{1-k^2}})e^{-(\frac{1}{2(1-k^2)})((\frac{x-m_x}{\sigma_1})^2-(\frac{2k(x-m_x)(z-m_z)}{\sigma_1\cdot\sigma_2})+(\frac{z-m_z}{\sigma_2})^2)} ,(3)$$

де x і z – чисельності відповідно жертви і хижака;

σ_1 і σ_2 – стандартні відхилення чисельності відповідно жертви і хижака;

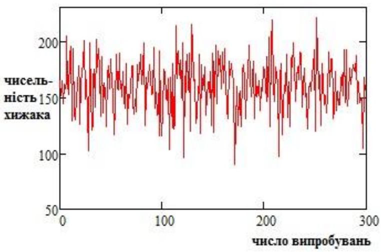
m_x і m_z – математичні сподівання чисельності жертв та хижаків відповідно;

k – коефіцієнт кореляції чисельності жертв і хижаків.

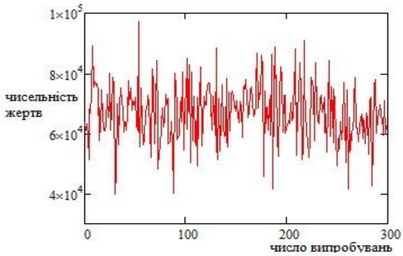
Використовуючи систему Mathcad 15.0, встановимо маргінальні розподіли чисельності жертви і хижака результатів моделювання за 2004 рік з використанням математичної моделі (2), див. рис. 2 а, б.

Взагалі, висновки щодо виду закону розподілу потребують додаткових досліджень в залежності від об’єму апріорної інформації про досліджуваний об’єкт чи систему.

Слід зауважити, що взаємодія «хижак – жертва», має достатньо значне розповсюдження і математична модель (2) може бути адаптована і для інших систем (не обов’язково екологічних, в тому числі і економічних), але алгоритм досліджень при цьому зберігає свою структуру.



а)



б)

Рис.°2. Маргінальний розподіл чисельності жертв і хижаків, використовуючи математичну модель (2); а) для жертви (заєць), б) для хижака (вовк).

Висновки. Математична модель (2) дозволяє прогнозування динаміки чисельності жертв і хижака терміном на 1 – 2 роки при відхиленнях в статистичних даних +20%, – 10% та забезпечує середню відносну похибку результатів моделювання 19% для чисельності жертв і 23% для хижака.

Запропонований програмний комплекс із застосуванням пакету Mathcad 15.0, дозволяє організувати обчислювальний експеримент для оцінки адекватності математичних моделей, отримувати результати моделювання чисельності жертв і хижака з допомогою відповідних математичних моделей для достатньо широкого спектру робочих параметрів із встановленого діапазону статистичних даних, а не лише для окремих випадків, що може призвести до недостовірних результатів моделювання.

Отримані результати і запропонований підхід можуть після відповідної адаптації використовуватись для дослідження макроекономічних систем з різним, але обмеженим числом компонентів, а також інших систем, взаємодія яких базується на принципах конкуренції.

Список використаних джерел

1. Хозяинова М. Г. К вопросу о применении методов регуляризации для идентификации технологических систем / М. Г. Хозяинова // Фундаментальные исследования. – 2007. – № 8. – С. 45-47.

2. Добровольський В.В. Основи теорії екологічних систем: [навч. підруч.] / В.В. Добровольський . – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 272 с.

3. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 248 с.

4. Грабар І. Г.,Тимонін Ю. О. , Бродський Ю. Б. Універсальна модель системи: методологічний аспект // Віс. ЖНАЕУ : науково – теор. зб. – 2009. – № 1. – С. 358 – 366.

5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики / А. Н.Тихонов, А. А Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

6. Зельдович Я. Б. Мышкис А. Д. Элементы математической физики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973. – 352 с.

7. Маевский А. В. Математические модели межвидовой конкуренции / А. В. Маевский, І. А. Пилькевич // Современный научный вестник. – 2014. – № 17 (213). – С. 88–93.

8. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология: особи, популяции и сообщества. В 2-х томах. Т. 1. Пер. с англ. под. ред. А. М. Гилярова. – М. : Мир, 1989. – 667 с.

9. Маевский А. В. Решение задачи идентификации рабочих параметров математической модели процесса динамики экологических систем / А. В. Маевский // Электронное моделирование. – 2016. – № 2, Т.38. – С. 105–115.

10. Бродський Ю. Б. Моделювання природних процесів взаємодії з урахуванням невизначенності в початкових умовах задачі Коші /Ю. Б. Бродський, О.В. Маєвський // «ScienceRise». – 2016. – № 9/2(26). – С. 24–30.